MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE

DIE VEKTORANALYSIS

UND IHRE ANWENDUNG IN DER THEORETISCHEN PHYSIK

von

Dr. W. v. IGNATOWSKY

I



А. Тилимович (Казан. Обозр.) Т. 11. № 5. 316.

Количественная оценка явленій и установленіе
количественного сходства и различій потребовали
особых методов, возникло ученіе о числе,
скалярный анализ. При изученіи пространствен-
ных образов, которые характеризуются своей
формой, размером и положеніем, необходимо
привлечь новые средства для характеристики
форм числом; таким образом создаются
методы (например, аналитическая геометрія),
приводящіе изученіе форм к изученію соотно-
шеній между числами. Однако приложеніе числового
анализа к исследованію пространственных форм
с одной стороны сложно, потому что соответственно
числу измереній образа необходимо в общем
случае вести три параллельных исследованія,
с другой стороны разбор аналитических зависимостей
часто так затушевывает геометрический характер
исследованія, что совершенно теряется его
наглядность. Поэтому естественно было зародиться
новому методу исследованія простран-

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
6,1

DIE VEKTORANALYSIS

UND IHRE ANWENDUNG IN DER THEORETISCHEN PHYSIK

VON

DR. W. V. IGNATOWSKY
IN GIESSEN

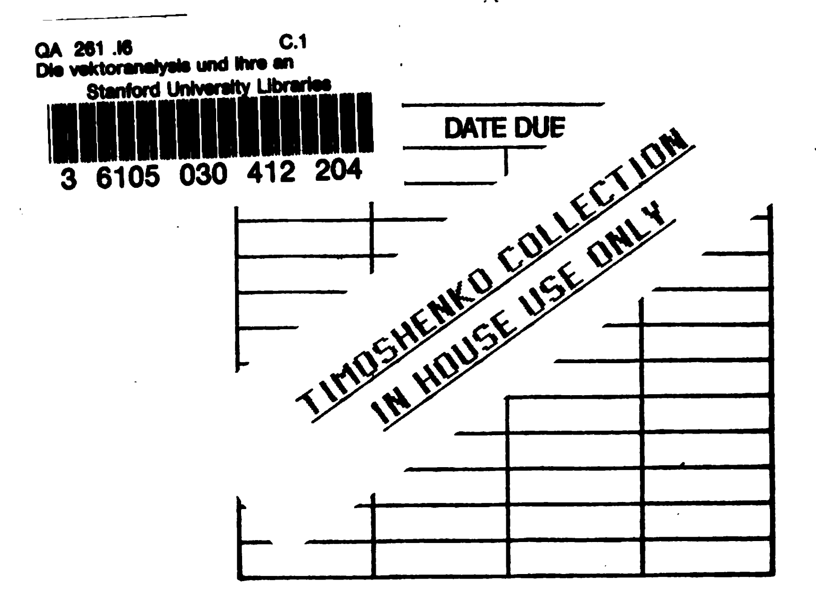
TEIL I

DIE VEKTORANALYSIS

MIT 27 TEXTFIGUREN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909


DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

Vorwort.

Obwohl es schon eine größere Anzahl von Schriften über Vektoranalysis gibt, bin ich doch gern der Aufforderung des Herausgebers dieser Sammlung nachgekommen, ein Buch über denselben Gegenstand zu schreiben. Denn wegen der fundamentalen Bedeutung der Vektoranalysis für die Behandlung der theoretischen Physik kann es nur von Vorteil sein, wenn diese Methode von möglichst vielen Seiten beleuchtet wird. Anderseits glaube ich auch in diesem Buche einiges Neue zu bieten, wie dies der kundige Leser sofort bemerken wird.

Die Vektoranalysis fordert, wie jede neue Methode, eine gewisse Mühe, um sich mit ihr vertraut zu machen. Man darf aber diese verhältnismäßig leichte Mühe nicht scheuen. Denn hat man sich einmal mit den Regeln der Vektoranalysis vertraut gemacht, so wird man ihre Vorteile bald schätzen lernen. Ein Vorteil besteht darin, daß man sich schnell über die räumliche Verteilung verschiedener Größen Klarheit schaffen und mit ihnen rechnen kann, ohne an ein bestimmtes Koordinatensystem gebunden zu sein.

Der nächste Schritt, nachdem man sich gewisse räumliche Vorstellungen einer physikalischen Erscheinung zurechtgelegt hat, besteht darin, diese Vorstellungen durch analytische Formeln auszudrücken. Hierbei wird man zur Vektoranalysis greifen, um mit ihrer Hilfe diese Vorstellungen zu fixieren und zu ordnen. Die weiteren Rechnungen übernimmt die gewöhnliche Analysis, deren Sache es auch ist, die vektoranalytischen Transformationen in ihrer Sprache auszudrücken.

Dieser Anschauung entsprechend, zerfällt das vorliegende Buch in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Vektoranalysis als selbständige Disziplin, ohne auf ein bestimmtes Gebiet der Physik zugeschnitten zu sein. Dabei wird aber immer im Auge behalten, daß das Buch für Physiker bestimmt ist. *Jeglicher Gebrauch von Koordinatensystemen zum Beweise irgendwelcher vektoranalytischen Transformationen ist gänzlich vermieden.* Der Schwerpunkt der Vektoranalysis liegt in der Untersuchung der räumlichen Verteilung eines Vektors und seiner Ab-

hängigkeit von der Zeit. Deshalb ist hierauf besonderes Gewicht gelegt. Anderseits glaubte ich auch die sogenannten Tensoren ausführlicher behandeln zu müssen, da sie in der theoretischen Physik vorkommen und ihre Kenntnis den zweiten Teil dieses Buches von vielen Transformationen entlastet.

Der zweite Teil behandelt einige Gebiete der theoretischen Physik zu dem Zweck, die Anwendbarkeit der Vektoranalysis zu zeigen. Deshalb ist selbstverständlich von jedem Beweis der Grundlagen der einzelnen Gebiete abgesehen, um so mehr, als diese in den verschiedenen Bändchen dieser Sammlung behandelt werden sollen. Es ist nur gezeigt worden, wie man mit Hilfe der Vektoranalysis leicht von den Grundlagen bis zu gewissen Endformeln, resp. Resultaten gelangen kann. Das erfordert mit Hilfe der gewöhnlichen Analysis oft umständliche Rechnungen, welche die Übersicht erschweren. Die Vektoranalysis hingegen läßt uns nie den Faden beim Gedankengange verlieren, da sie ständig unsere Raumvorstellungen fixiert.

Die Darstellung selbst ist, dem Ziel dieser Sammlung entsprechend, so gehalten, daß ein Leser, welcher mit der Differential- und Integralrechnung vertraut ist, die verschiedenen Rechnungen verfolgen kann. Um das Aufsuchen der verschiedenen Formeln zu erleichtern, ist am Schluß des ersten Teiles eine Tafel hinzugefügt, welche die wichtigsten Formeln enthält.

Zum Schluß möchte ich die Gelegenheit benutzen, um dem Herausgeber dieser Sammlung, sowie Herrn Ingenieur Fritz Emde (Berlin) und Herrn Prof. Dr. H. W. Schmidt (Gießen) für manchen wertvollen Hinweis und Ratschlag, welche zur Klärung des Textes beigetragen haben, und auch für die Mühe, der sich die genannten Herren bei Lesung der Korrekturen unterzogen haben, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Gießen, Juli 1909.

W. v. Ignatowsky.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel V.

Allgemeine Bemerkungen.

Kapitel VI.

Geometrische Darstellung.

Kapitel VII.

Analytische Darstellung.

Kapitel VIII.

Verschiedene Arten von Vektoren.

Literaturverzeichnis.

Abraham, M. Geometrische Grundbegriffe. Encykl. d. mathem. Wiss. IV. 14. Leipzig 1901, B. G. Teubner.

Bucherer, A. Elemente der Vektoranalysis mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Aufl. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Föppl-Abraham. Theorie der Elektrizität. 2. Aufl. Bd. I. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik. Insbesondere Bd. V. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

—— Die Geometrie der Wirbelfelder. Leipzig 1897, B. G. Teubner.

Gans, R. Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Gibbs-Wilson. Vector Analysis. A text-book for the use of students of mathematics and physics. New-York-London 1907, Ch. Scribner's Sons.

Jahnke, E. Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Jaumann, G. Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkt aus dargestellt. Leipzig 1905, A. Barth.

Valentiner, S. Vektoranalysis. Leipzig 1907, Göschen

Einleitung.

Man unterscheidet in der Physik zwei Arten von Größen: Skalare und Vektoren. Ein Skalar stellt einen Zahlenwert dar, welcher das Verhältnis zu derjenigen Einheit angibt, die zur Messung der betreffenden Größe dient. Zu dieser Art von Größen gehört die Temperatur, Dichte, Energie u. a. Ein Vektor besitzt außer dem erwähnten Zahlenwert noch eine bestimmte Richtung. Deshalb unterscheiden sich die Vektoren untereinander nicht nur durch ihre Zahlenwerte, sondern auch durch ihre Richtungen. Den Zahlenwert eines Vektors nennt man den Betrag eines Vektors. Vektoren sind z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung usw. Gewöhnlich wird ein Vektor durch eine Strecke dargestellt, deren Länge in einem gewissen Maßstabe dem Betrag des Vektors gleich ist, und deren Richtung die Richtung (und den Richtungssinn) des Vektors angibt. Da die Projektion einer Strecke auf eine feste Richtung bei einer parallelen Verschiebung der Strecke sich nicht ändert, so kommt es auf die Lage des Anfangspunktes derjenigen Strecke, welche einen Vektor darstellt, nicht an.

Wir werden uns, wie es allgemein üblich ist, zur Kennzeichnung von Vektoren der fetten gotischen Buchstaben bedienen, während skalare Größen durch lateinische oder griechische Schrift dargestellt werden sollen. Der Betrag eines Vektors $\mathfrak{A}$ wird durch $|\mathfrak{A}|$ ausgedrückt oder durch einen entsprechenden lateinischen Buchstaben, je nachdem es bequemer ist. Einen Vektor, dessen Betrag gleich eins ist, nennt man Einheitsvektor. Wir werden einen solchen Vektor durch den Index 0 hervorheben. Demnach ist der Einheitsvektor von $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{A}_0$. Hieraus ergibt sich sofort, daß

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\mathfrak{A}_0 = A\mathfrak{A}_0$$

ist.

Da jeder Vektor eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Betrag hat, so können zwei Vektoren dann und nur dann gleich sein, wenn ihre Beträge gleich sind und ihre Richtungen nebst Richtungssinn zusammenfallen.

Die Dimensionen eines Vektors schreibt man gewöhnlich dem Betrage zu, während der entsprechende Einheitsvektor als dimensionslos aufgefaßt wird.

Der Einheitsvektor längs der Normale einer Oberfläche soll durch $\mathfrak{n}$ ausgedrückt werden und bei einer geschlossenen Oberfläche stets nach außen hin gerichtet sein.

Neuerdings bezeichnet man z. B. durch $\mathfrak{A}_x$ die Komponente des Vektors $\mathfrak{A}$ längs der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wir wollen dieser Bezeichnungsweise nicht folgen und zwar aus dem Grunde, weil wir die Bezeichnung $\mathfrak{A}_x$, oder $\mathfrak{A}_x$ für denjenigen Wert eines Tensors $\mathfrak{A}$ aufgehoben haben, den dieser annimmt, falls der den Tensor bestimmende Vektor $\mathfrak{r}_0$ mit der X-Achse zusammenfällt.

Die weiteren Bezeichnungen ergeben sich aus dem Text und entsprechen im übrigen den allgemein verbreiteten.

Kapitel I.

Elementare Vektoroperationen.

1. Addition und Subtraktion von Vektoren. Gegeben seien zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. An den Endpunkt von $\mathfrak{A}$ legen wir eine Strecke, welche dem Betrag und der Richtung nach gleich $\mathfrak{B}$ ist (Fig. 1).

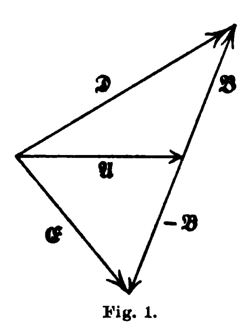


Fig. 1.

Man bezeichnet als Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ denjenigen Vektor $\mathfrak{D}$, welcher den Anfangspunkt von $\mathfrak{A}$ mit dem Endpunkt von $\mathfrak{B}$ verbindet und nach diesem Endpunkt hin gerichtet ist. Dadurch ist der Betrag und die Richtung der Summe $\mathfrak{D}$ vollständig bestimmt. Man drückt diese Summe durch die Gleichung aus

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{D}. \tag{1}$$

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichgerichtet, so wird auch $\mathfrak{D}$ mit dieser gemeinsamen Richtung zusammenfallen, und (1) geht über in eine Addition der Beträge, d. h. in eine gewöhnliche Addition skalarer Größen.

Nehmen wir statt $\mathfrak{B}$ den negativen Vektor $-\mathfrak{B}$, so folgt aus analogen Betrachtungen und Fig. 1

$$\mathfrak{A} + (-\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{C}. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) bilden die Regeln für die Addition und Subtraktion von Vektoren. Es sind hierbei $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ nichts

anderes als die Diagonalen der Parallelogramme, gebildet aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, resp. aus $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$.

Daß es in (1) und (2) auf die Reihenfolge der Glieder nicht ankommt, ersieht man sofort aus Fig. 2. Wir können deshalb allgemein schreiben

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}, \tag{3}$$

d. h. das kommutative Gesetz behält seine Gültigkeit bei der Addition und Subtraktion von Vektoren.

Die Beziehungen (1) bis (3) sind leicht auf eine beliebige Anzahl von Vektoren zu erweitern Denn je zwei Vektoren können zu einem vereinigt werden und demzufolge nacheinander alle Vektoren durch einen einzigen dargestellt werden. Da es hierbei, wie leicht aus der geometrischen Konstruktion zu ersehen ist, auf die Gruppierung der Vektoren untereinander nicht ankommt, so können wir z. B. für drei Vektoren die Identität schreiben

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}. \tag{4}$$

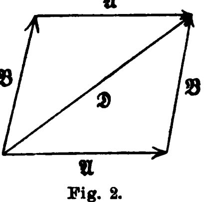


Fig. 2.

Diese Gleichung drückt die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes aus.

Fügt man eine beliebige Anzahl von Vektoren so zusammen, daß der Anfang des einen mit dem Ende des andern zusammenfällt, so folgt aus (1) bis (4), daß die Strecke, welche den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des letzten verbindet, nach Größe und Richtung gleich sein wird der Summe der gegebenen Vektoren. Da man jeden der zu addierenden Vektoren beliebig klein nehmen kann, so erhellt hieraus ohne weiteres die Bedeutung des Integrals

$$\mathfrak{A} = \int_a^b d\mathfrak{l}, \tag{5}$$

wo $d\mathfrak{l}$ eines der gerichteten Linienelemente einer beliebigen Raumkurve bedeutet. Dieser Vektor $\mathfrak{A}$ ist nichts anderes als ein Vektor, der die beiden Endpunkte a und b der gegebenen Kurve verbindet.

Ist die Kurve geschlossen, so folgt unmittelbar

$$\mathfrak{A} = \int_a^a d\mathfrak{l} = \int_L d\mathfrak{l} = 0. \tag{6}$$

Hierbei bedeutet L, wie später stets in diesem Buche, eine geschlossene Kurve.

2. Einführung eines rechtwinkligen Achsensystems. Aus den Erörterungen in Nr. 1 ist ersichtlich, daß wir einen Vektor $\mathfrak{A}$ als die Summe einer beliebigen Anzahl von Vektoren auffassen können. Im besonderen können wir $\mathfrak{A}$ durch drei nicht komplanare Vektoren darstellen, d. h. durch Vektoren, die nicht ein und derselben Ebene parallel sind. Dieser Fall ist deshalb wichtig, weil die Kenntnis dreier solcher Vektoren genügt, um einen Vektor $\mathfrak{A}$ im Raume vollständig zu bestimmen. Die Beträge dieser drei Vektoren nennt man die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}$ längs der drei nicht komplanaren Richtungen.

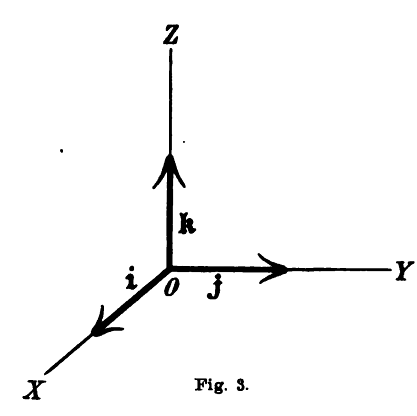


Fig. 3.

Wir nehmen jetzt diese drei Richtungen senkrecht zueinander an, d. h. führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z ein. Bezeichnen wir die Komponenten von $\mathfrak{A}$ längs den Achsen X, Y, Z durch A_1, A_2, A_3 und die Einheitsvektoren längs derselben Achsen durch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so erhalten wir nach den Regeln der Addition von Vektoren und aus dem Begriffe des Einheitsvektors (siehe Einleitung)

$$\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k}, \tag{7}$$

wobei die Komponenten sich berechnen aus:

$$A_1 = |\mathfrak{A}|\cos(\mathfrak{A}x); \quad A_2 = |\mathfrak{A}|\cos(\mathfrak{A}y); \quad A_3 = |\mathfrak{A}|\cos(\mathfrak{A}z). \tag{8}$$

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ nennt man Grundvektoren.

Das Koordinatensystem, das wir später durchweg benützen werden, soll das sogenannte Rechtssystem sein. Hierbei ist die Drehung, welche man der X-Achse um die Z-Achse herum erteilen muß, um sie zum Zusammenfallen mit der Y-Achse zu bringen, eine rechtsläufige, falls man in Richtung der positiven Z-Achse blickt, also im Drehsinn des Uhrzeigers. (Siehe Fig. 3, wo zugleich die Grundvektoren in der richtigen Lage eingezeichnet sind).

Dieses System kann auch durch Daumen (X-Achse), Mittelfinger (Y-Achse) und Zeigefinger (Z-Achse) der linken Hand dargestellt werden. Auf diese „Fingerregel“ werden wir uns weiterhin öfters berufen.

3. Multiplikation von Vektoren. Skalares Produkt. Aus dem Begriff Einheitsvektor und Betrag eines Vektors folgt unmittelbar die Regel der Multiplikation eines Vektors mit einem skalaren Faktor. Es ist also

(9) $$\mathfrak{A} = m\mathfrak{a},$$

wo $\mathfrak{A}$ ein Vektor ist, dessen Richtung mit derjenigen von $\mathfrak{a}$ zusammenfällt und dessen Betrag ist

(10) $$|\mathfrak{A}| = m|\mathfrak{a}|.$$

Durch (9) und (10) ist diese Art der Multiplikation vollständig bestimmt. Da sie sich durch nichts von den Regeln der gewöhnlichen Algebra unterscheidet, so gilt hier das assoziative und kommutative Gesetz, d. h. es ist

(a) $$m(n\mathfrak{a}) = (mn)\mathfrak{a}, \quad n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}n,$$

und das distributive Gesetz:

(b) $$n(\mathfrak{a} + \mathfrak{r}) = n\mathfrak{a} + n\mathfrak{r}, \quad (m + n)\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{a}.$$

Wir gehen jetzt zu dem s k a l a r e n Produkt zweier Vektoren über. Unter einem solchen Produkt verstehen wir einen Skalar, dessen Wert gleich ist dem Produkt der Beträge der gegebenen Vektoren, multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Ein solches Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

Laut Definition haben wir also:

(11) $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Hieraus ist leicht zu ersehen, daß

(c) $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

ist, d. h. bei der skalaren Multiplikation zweier Vektoren wird das kommutative Gesetz befolgt. Auch das distributive Gesetz bleibt erfüllt. Aus einer einfachen geometrischen Konstruktion schließt man:

(d) $$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrecht zueinander, dann folgt aus (11), daß das skalare Produkt dieser beiden Vektoren gleich Null ist. Also ist für $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$:

(12) $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0.$$

Es folgt hieraus im Hinblick auf Nr. **2**

$$\text{(e)} \qquad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{i}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{j} = 0.$$

Bezeichnen wir den Betrag von $\mathfrak{A}$ durch A und den Einheitsvektor längs $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_0$, d. h. setzen

$$\mathfrak{A} = A\mathfrak{A}_0,$$

dann ergibt (11)

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = A^2, \qquad \text{(14)} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 = A.$$

Deshalb ist

$$\text{(f)} \qquad \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1.$$

4. Das Vektorprodukt. Gegeben sei ein ebenes Flächenelement. Dieses Element kann man von zwei Seiten aus betrachten. Die eine der Seiten soll als die positive, die andere als die negative bezeichnet werden. Auf der positiven Seite errichten wir als Normale den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$, dessen positive Richtung vom Flächenelement nach außen festgesetzt wird. Das Flächenelement wird von einer Kurve begrenzt, deren positive Umlaufsrichtung einer rechtsläufigen Drehung, um $\mathfrak{n}$ als Achse, laut Nr. **2** entsprechen soll. Wir bezeichnen das Flächenelement durch einen Vektor $d\mathfrak{f}$, dessen Betrag df gleich dem Flächeninhalt des Elementes ist, und dessen Richtung mit $\mathfrak{n}$ zusammenfällt. Demnach ist also

$$\text{(15)} \qquad |d\mathfrak{f}| = df, \quad d\mathfrak{f} = df\mathfrak{n}.$$

$d\mathfrak{f}$

df

Fig. 4.

Wir sehen also, daß dieser Vektor $d\mathfrak{f}$ (Fig. 4) sich ganz wesentlich von den bisher behandelten Vektoren unterscheidet und zwar dadurch, daß er eine ganz bestimmte Umlaufsrichtung, um sich selbst, als Achse, festlegt. Wir kommen später in Nr. **37** noch einmal besonders auf diese Art von Vektoren zurück.

Da die Summe von Vektoren wieder einen Vektor ergibt, so wird das Integral

$$\text{(a)} \qquad \int_f d\mathfrak{f} = \mathfrak{C}$$

über eine nicht geschlossene Fläche f durch einen Vektor $\mathfrak{C}$ dargestellt werden können.

Wir wollen den Fall untersuchen, daß f eben ist und zwar ein Parallelogramm, dessen Seiten die beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

sind. Diese folgen aufeinander in der in Fig. 5 angegebenen Weise und bestimmen hierdurch die Umlaufsrichtung um das Parallelogramm.

Setzen wir jetzt den Wert von $d\mathfrak{f}$ aus (15) in (a) ein und beachten, daß für alle Elemente $\mathfrak{n}$ konstant ist, so erhalten wir für unsere spezielle Annahme

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{n}|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \tag{16}$$

Durch die Umlaufsrichtung, die durch den Pfeil in Fig. 5 angezeigt ist, bestimmt sich auch die positive Richtung von $\mathfrak{n}$. Sie weist von der Zeichenebene hin zum Beschauer.

Die rechte Seite von (16) bezeichnet man gewöhnlich durch

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \tag{17}$$

Fig. 5.

und nennt diesen Ausdruck das Vektorprodukt oder vektorielles Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{C}$ seiner Definition nach ein Vektor ist, so können wir sagen, daß das vektorielle Produkt zweier Vektoren, im Gegensatz zu dem skalaren Produkt, wieder einen Vektor ergibt. Die Reihenfolge der Vektoren in (17), welche derjenigen der Fig. 5 entspricht, ergibt uns mit Hilfe der Fingerregel (Daumen — erster Vektor in der Klammer, Mittelfinger — zweiter Vektor) sofort die Richtung von $\mathfrak{C}$ (Zeigefinger) in Übereinstimmung mit (16).

Aus dieser Fingerregel folgt sofort, daß

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] \tag{18}$$

ist. Hierbei entspricht die rechte Seite der Fig. 6.

Fig. 6.

Der Ausdruck (18) zeigt, daß das kommutative Gesetz bei einem Vektorprodukt nicht erfüllt wird.

Wir wenden uns jetzt wieder zu dem Integral (a), setzen aber jetzt voraus, daß f eine geschlossene Oberfläche bedeutet, und bezeichnen diese, wie auch späterhin jede geschlossene Fläche, durch F. Die Richtung von $d\mathfrak{f}$ soll der äußeren Normale der Oberfläche entsprechen. Dies wollen wir im folgenden bei ähnlichen Integrationen stets voraussetzen.

Für diesen Fall bestimmen wir das skalare Produkt des Integrals $\mathfrak{C}$ mit einem konstanten Einheitsvektor $\mathfrak{a}_0$, d. h.

$$\text{(b)} \qquad A = \mathfrak{a}_0 \mathfrak{C} = \int_F \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{f}.$$

Dabei haben wir den konstanten Vektor $\mathfrak{a}_0$ unter das Integralzeichen setzen können. A bedeutet nichts anderes, als die Summe der skalaren Produkte der einzelnen $d\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{a}_0$, oder laut (11) die Summe der Projektionen der einzelnen Flächenelemente der geschlossenen Fläche F auf eine zu $\mathfrak{a}_0$ senkrechte Ebene.

Konstruieren wir einen Zylinder, dessen Erzeugende senkrecht zur genannten Ebene ist und die Oberfläche F tangiert, so schneidet der Zylinder aus dieser Ebene dasjenige Stück heraus, welches gerade mit den Projektionen von den $d\mathfrak{f}$ belegt wird. Diese Belegung wird aber eine doppelte sein und von entgegengesetztem Vorzeichen, da wir als positive Normale die äußere angenommen haben und infolgedessen als positive Seite der Flächenelemente $d\mathfrak{f}$ die äußere Seite. Deshalb wird das Integral (b) gleich Null sein für eine beliebige geschlossene Oberfläche F. Da aber die Richtung von $\mathfrak{a}_0$ und demnach auch die Lage der entsprechenden Ebene vollkommen willkürlich ist, so müssen wir hieraus schließen, daß auch allgemein

$$\text{(19)} \qquad \int_F d\mathfrak{f} = 0$$

sein wird, falls F eine geschlossene Oberfläche bedeutet.

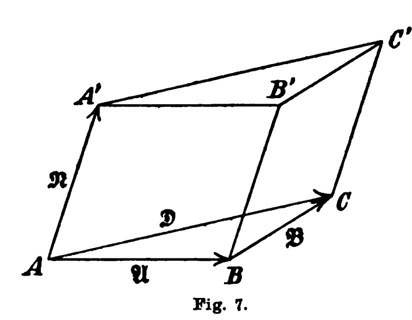


Fig. 7.

Wir konstruieren aus den drei nicht komplanaren Vektoren $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein Prisma Fig. 7, dessen Kanten BB', CC' und AA' gleich und parallel $\mathfrak{N}$ sind, und wenden auf die Oberfläche dieses Prismas die Gleichung (19) an. Der Teil des Integrals (19), der sich auf die beiden Flächen ABC und $A'B'C'$ bezieht, verschwindet, da diese Flächen parallel und gleich groß sind und entgegengesetzte Normalen haben. Wir erhalten deshalb

$$\text{(c)} \qquad \int_{ABB'A'} d\mathfrak{f} + \int_{BCC'B'} d\mathfrak{f} + \int_{CAA'C'} d\mathfrak{f} = 0.$$

Laut den Ausführungen bei der Ableitung von (16) ist aber

$$\int\limits_{ABB'A'} d\mathfrak{f} = [\mathfrak{A}\mathfrak{n}]$$

und, da BB' gleich $\mathfrak{n}$ ist,

$$\int\limits_{BCC'B'} d\mathfrak{f} = [\mathfrak{B}\mathfrak{n}].$$

Was das letzte Integral in (c) anbetrifft, so folgt hierfür, da AC gleich $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist:

$$\int\limits_{CAA'C'} d\mathfrak{f} = -[\mathfrak{D}\mathfrak{n}].$$

Das Minuszeichen ergibt sich daher, weil die Normale zur Fläche $CAA'C'$ entgegengesetzt dem Vektorprodukt $[\mathfrak{D}\mathfrak{n}]$ gerichtet ist.

Demnach ist

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{n}] = [(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{n}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{n}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{n}], \tag{20}$$

woraus folgt, daß das distributive Gesetz bei der vektoriellen Multiplikation erfüllt wird.

Aus (16) ergibt sich weiter, daß das Vektorprodukt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verschwindet, falls die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichgerichtet sind. Also ist für $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = 0. \tag{21}$$

Endlich ist ohne weiteres klar, daß man einen skalaren Faktor m ebenso vor, als auch in die eckigen Klammern eines Vektorproduktes setzen kann, d. h. es ist

$$m[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [m\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}, m\mathfrak{B}]. \tag{22}$$

Als Beispiel von Vektorprodukten können wir solche aus den Grundvektoren in Nr. **2** bilden und erhalten

$$[\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = 0;\ [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = 0;\ [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0;\ \mathfrak{k} = [\mathfrak{i}\mathfrak{j}];\ \mathfrak{j} = [\mathfrak{k}\mathfrak{i}];\ \mathfrak{i} = [\mathfrak{j}\mathfrak{k}], \tag{d}$$

wie man sich mit Hilfe der Fingerregel überzeugen kann.

5. Produkte von drei und vier Vektoren. Aus (9) folgt unmittelbar, falls wir statt m das skalare Produkt $m = \mathfrak{C}\mathfrak{C}$ einsetzen

$$\mathfrak{A}m = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}. \tag{23}$$

Hierbei ist

(24) $$|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{C}| \cdot |\mathfrak{E}| \cos(\mathfrak{C}\mathfrak{E}),$$

während die Richtung von $\mathfrak{B}$ durch diejenige von $\mathfrak{A}$ bestimmt wird.

Ersetzen wir bei einem Vektor $p\mathfrak{E}$ die skalare Größe p durch $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, so erhalten wir ganz analog

(25) $$p\mathfrak{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{D}$$

und

(26) $$|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{C}| \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{C}).$$

Die Richtung von $\mathfrak{D}$ bestimmt sich durch diejenige von $\mathfrak{E}$. Es ist demnach ersichtlich, daß $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ völlig verschieden sind, obwohl sie von denselben drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{C}$ gebildet werden. Diese Verschiedenheit wird durch die Lage des Punktes in (23) und (25) gekennzeichnet.

Wir wollen jetzt das skalare Produkt m eines Vektors $\mathfrak{A}$ mit einem Vektorprodukt

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{B}\mathfrak{E}]$$

untersuchen, d. h.

(a) $$m = \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{E}].$$

Vergegenwärtigen wir uns die Bedeutung von $\mathfrak{C}$ laut Nr. 4, so sehen wir, daß m das Volumen eines Quaders vorstellt, dessen Kanten durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ gebildet werden. Dasselbe Volumen wird aber auch durch $\mathfrak{B}[\mathfrak{E}\mathfrak{A}]$ und $\mathfrak{E}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ dargestellt; wir können deshalb schreiben

(27) $$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{E}] = \mathfrak{E}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{E}\mathfrak{A}],$$

und diese Ausdrücke sind durch zyklische Vertauschung der drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$ entstanden. Bei nichtzyklischer Vertauschung wechselt das Produkt (a) sein Zeichen.

So ist z. B.

(28) $$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{E}] = -\mathfrak{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{E}],$$

was aus (a) und (18) unmittelbar folgt.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung des Vektorprodukts

(b) $$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{E}]]$$

über. Es ist leicht zu sehen, daß der Vektor $\mathfrak{C}$ in der Ebene M der beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ liegt. Denn der Vektor $\mathfrak{D} = [\mathfrak{B}\mathfrak{E}]$

liegt senkrecht zu dieser Ebene und der Vektor $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{D}]$ wieder senkrecht zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, also in der Ebene M. Hieraus und aus (21) folgt, daß, falls $\mathfrak{A}$ senkrecht zur Ebene M ist, $\mathfrak{C}$ gleich Null sein wird. Zerlegen wir also $\mathfrak{A}$ in zwei Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{N}$ senkrecht zur Ebene M und $\mathfrak{H}$ in dieser Ebene liegen mag, so ersehen wir, daß $\mathfrak{C}$ senkrecht zu $\mathfrak{H}$ ist.

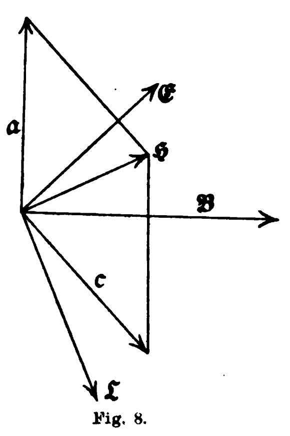


Fig. 8.

Die Lage von $\mathfrak{C}$ bestimmt sich durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ aus der Fingerregel.

Es sei M die Zeichenebene der Fig. 8 und der Vektor $\mathfrak{D} = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ zum Beschauer gerichtet. Wir zerlegen jetzt $\mathfrak{H}$ in zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$, wobei $\mathfrak{a}$ senkrecht zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{r}$ senkrecht zu $\mathfrak{C}$ ist. Dann erhalten wir, wenn wir unter $\mathfrak{B}_0$ den Einheitsvektor längs $\mathfrak{B}$ verstehen, unter Berücksichtigung der Fingerregel (vgl. Fig. 8)

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{D}] = [\mathfrak{a}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}_0 |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{D}| = \mathfrak{B}_0 |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}| \sin(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$= \mathfrak{B} \cdot |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{C}| \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{C}) = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C}$$

und analog

$$[\mathfrak{r}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = -\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Demzufolge wird sein

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = [\mathfrak{H}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = [(\mathfrak{a} + \mathfrak{r})[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}. \tag{29}$$

Multiplizieren wir (29) skalar mit einem Vektor $\mathfrak{M}$, so erhalten wir wegen (27)

$$\mathfrak{M}[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = [\mathfrak{M}\mathfrak{A}][\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{M}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{M}\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}. \tag{30}$$

Wir können ein weiteres Beispiel eines Produktes von vier Vektoren anführen, indem wir in (29) $\mathfrak{A}$ durch $[\mathfrak{D}\mathfrak{N}]$ ersetzen. Es folgt dann

$$[[\mathfrak{D}\mathfrak{N}][\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{D}\mathfrak{N}]\mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot [\mathfrak{D}\mathfrak{N}]\mathfrak{B} \tag{31}$$

oder laut (27)

$$[[\mathfrak{D}\mathfrak{N}][\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{N}\mathfrak{C}]\mathfrak{D} - \mathfrak{C} \cdot [\mathfrak{N}\mathfrak{B}]\mathfrak{D}. \tag{31a}$$

Nehmen wir an, die drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in (a) wären komplanar. Dann verschwindet das dreifache Produkt (a). Das-

selbe findet statt, falls $\mathfrak{A}$ parallel $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ ist. Also ist für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ parallel einer Ebene:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = 0. \tag{32}$$

Kapitel II.

Differentialoperationen.

6. Differentiale von Vektoren und von Produkten von Vektoren. Um den Begriff des Differentials eines Vektors zu erleichtern, greifen wir zu einigen Beispielen aus der Physik. Es sei z. B. $\mathfrak{A}$ eine Kraft, welche an einer Stelle eines Körpers wirkt. Diese Kraft kann sich mit der Zeit in ihrem Betrage und in ihrer Richtung ändern. Es soll weiter ein Vektor die Geschwindigkeit eines Massenteilchens einer bewegten Flüssigkeit vorstellen. Hierbei wird der Vektor an verschiedenen Teilen verschieden sein. Aus diesen Beispielen müssen wir schließen, daß sich im allgemeinen ein Vektor mit der Zeit und mit dem Ort ändert, d. h. wir müssen einen Vektor als Zeit- und Ortsfunktion ansehen.

Um die Veränderung eines Vektors mit der Zeit und dem Ort verfolgen zu können, führen wir den Begriff des Feldes ein, welcher der Elektrizitätslehre entnommen ist; und zwar wollen wir unter einem Vektorfeld einen Raum verstehen, wo jedem Punkt ein bestimmter Vektor zugeordnet ist. Ganz analog wird sich auch ein skalares Feld definieren lassen. Wir wollen im allgemeinen annehmen, daß ein Feld von der Zeit und von anderen Parametern abhängen kann.

Auf die nähere Untersuchung der Felder gedenken wir später (Kap. VI) einzugehen. An dieser Stelle haben wir die Felder lediglich deshalb eingeführt, um den Begriff eines Vektordifferentials zu erleichtern. Wir wollen uns jetzt klar machen, was wir unter einem solchen zu verstehen haben.

Gegeben sei ein Vektor $\mathfrak{A}$, den wir im allgemeinsten Fall als veränderlich mit dem Ort und der Zeit und als abhängig von anderen Parametern ansehen müssen. Wir nehmen an, der Vektor $\mathfrak{A}$ erleide eine unendlich kleine Änderung und gehe über in $\mathfrak{A}'$. Die Änderung selbst werden wir, in Analogie mit der Schreibweise der gewöhnlichen Analysis, durch $d\mathfrak{A}$ bezeichnen. Dem Sinne des Vorhergehenden entsprechend, müssen wir annehmen, daß $d\mathfrak{A}$ sich nicht nur auf

die Änderung des Betrages des Vektors $\mathfrak{A}$ bezieht, sondern auch eine Änderung der Richtung bedeuten kann.

Wir werden also setzen

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + d\mathfrak{A} \tag{33}$$

und diese Summe als eine geometrische auffassen. (Fig. 9.). Hieraus folgt

$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{A} = d\mathfrak{A}. \tag{34}$$

Wir wollen jetzt das Differential eines skalaren Produktes zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ermitteln. Bezeichnen wir durch $\mathfrak{B}'$ denjenigen Vektor, in welchen $\mathfrak{B}$ nach der Änderung übergeht, so erhalten wir für das Differential des skalaren Produktes, nach der Definition des Differentials,

$$d(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

oder laut (33) bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung

$$d(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\,d\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\,d\mathfrak{A}. \tag{35}$$

Ganz analog ergibt sich für das Vektorprodukt

$$d[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}\,d\mathfrak{B}] + [d\mathfrak{A}, \mathfrak{B}], \tag{36}$$

wobei auf die Reihenfolge der Vektoren zu achten ist.

Fig. 9.

Das Angeführte ermöglicht uns, das Differential beliebiger Vektorprodukte zu bestimmen; denn (35) und (36) zeigen uns, daß das Differential eines Produktes von Vektoren auf dieselbe Weise, wie in der gewöhnlichen Analysis, erhalten wird.

So ist z. B.

$$d(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) = d\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + \mathfrak{A}[d\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] + \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,d\mathfrak{C}]. \tag{37}$$

Ferner folgt aus (11) und (35) für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$:

$$d(\mathfrak{A}^2) = 2|\mathfrak{A}|\,d|\mathfrak{A}| = 2\,\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A}. \tag{38}$$

Bezeichnen wir den Einheitsvektor längs $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_0$, so ist

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\mathfrak{A}_0;\ d\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0\,d|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{A}|\,d\mathfrak{A}_0. \tag{39}$$

Multiplizieren wir den letztern Ausdruck rechts und links skalar mit $2\,\mathfrak{A}$, so erhalten wir

$$2\,\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A} = 2\,|\mathfrak{A}|\,d|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{A}|\cdot 2\,\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A}_0$$

oder wegen (38)

$$(40) \qquad \mathfrak{A}\, d\mathfrak{A}_0 = 0,$$

d. h. Die Änderung des Einheitsvektors steht immer senkrecht auf dem Vektor selbst. Erleidet deshalb ein Vektor $\mathfrak{B}$ nur eine Richtungsänderung, bleibt er also dem Betrag nach konstant, so muß stets sein

$$(41) \qquad \mathfrak{B}\, d\mathfrak{B} = 0 \text{ für } |\mathfrak{B}| = \text{konst.}$$

Dies folgt auch aus (38), falls wir dort $\mathfrak{A}$ dem Betrag nach konstant annehmen, da laut (13) $\mathfrak{A}^2 = A^2$ ist.

7. Differentialquotienten. Teilen wir eine Gleichung zwischen Vektoren beiderseits durch einen Skalar, so kommt es hierbei nur auf Division der Beträge der entsprechenden Vektoren an. Eine solche Teilung ist deshalb gestattet und vollständig sinngemäß. Dasselbe läßt sich auch bezüglich der Division eines Produktes von Vektoren durch einen Skalar sagen.

Hiernach können wir die in Nr. **6** erhaltenen Differentiale von Vektoren durch das Differential eines beliebigen skalaren Parameters teilen und erhalten so den Differentialquotienten des entsprechenden Vektors nach einem bestimmten skalaren Parameter.

Demnach wäre z. B. der Differentialquotient nach der Zeit t eines skalaren Produktes zweier Vektoren wegen (35) gleich

$$(42) \qquad \frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{dt} = \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{A}}{dt},$$

und ganz analog erhalten wir für ein Vektorprodukt

$$(43) \qquad \frac{d[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{dt} = \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B}\right] + \left[\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right].$$

Die Bestimmung des Differentialquotienten von Vektoren oder von Produkten von Vektoren nach einem skalaren Parameter erfolgt also genau nach den Regeln der gewöhnlichen Analysis.

8. Einführung des Operators ∇. Mit Rücksicht auf Nr. **6** und **7** können wir jetzt die Abhängigkeit der Änderung eines Vektors von der Änderung eines skalaren Parameters bestimmen.

Dies macht die Vektoranalysis aber noch lange nicht für die Beschreibung physikalischer Erscheinungen wirklich brauchbar. Um dies zu erreichen, müssen wir die Beziehungen ableiten, die zwischen den Differentialen zweier Vektoren bestehen. So ist es von großer Wichtigkeit, den Zusammenhang zwischen der

Änderung $d\mathfrak{A}$ des Vektors $\mathfrak{A}$ und einer unendlich kleinen Strecke $d\mathfrak{l}$ in einem Vektorfeld zu ermitteln. Dabei stellt $d\mathfrak{A}$ die Differenz der Vektoren $\mathfrak{A}$ am End- und Anfangspunkt der Strecke $d\mathfrak{l}$, unter der Voraussetzung dar, daß sich $\mathfrak{A}$ entlang $d\mathfrak{l}$ stetig ändert. Es ist ersichtlich, daß in diesem Fall $d\mathfrak{A}$ nicht nur von dem Betrage, sondern auch von der Richtung von $d\mathfrak{l}$ abhängen wird. Die gesuchte Beziehung gibt uns Aufschluß über gewisse Eigenschaften der räumlichen Verteilung des betreffenden Vektors.

Um die Ermittelung solcher Beziehungen zu erleichtern, führen wir ein neues Symbol ∇, „Nabla“ genannt, ein.[1] Unter ∇ ist eine ganz bestimmte Rechenoperation verstanden. Für sich allein geschrieben, hat das Symbol ∇ keinen Sinn, genau so wenig, wie z. B. das Summenzeichen Σ oder das Differentialzeichen d. ∇ muß, gerade so wie d, stets in Verbindung mit Skalaren oder Vektoren auftreten. Diese Verbindung wird in Form eines Produktes geschrieben, z. B. ∇p, $\nabla \mathfrak{A}$, und unter Einhaltung gewisser Regeln wie ein Produkt aus ∇ und den entsprechenden Größen behandelt.

Wir wollen jetzt definieren, was wir unter einem solchen „Produkt“ verstehen, und zwar für den Fall, daß in diesem Produkt ∇ nur einmal vorkommt.

Gegeben seien die Produkte ∇p, $\nabla \mathfrak{A}$, $[\nabla \mathfrak{A}]$ usw. Wir bestimmen ein solches oder ähnliches Produkt nach folgender Regel, die zugleich als Definition von ∇ dienen soll.

Man setze in das Produkt statt ∇ das gerichtete Flächenelement $d\mathfrak{f}$, integriere über eine geschlossene Oberfläche F, teile durch das von F eingeschlossene Volumen V und gehe dann zur Grenze $V = 0$ über. Hierbei sollen diejenigen Größen, welche im Produkt **vor** ∇ stehen, bei der Integration über F als konstant betrachtet werden.

Durch diese Regel ist ein solches Produkt vollständig bestimmt und seine Berechnung festgelegt.

Man kann demnach mit Recht ∇ als einen besonderen Operator bezeichnen. Da dieser Operator durch die gerichtete Größe $d\mathfrak{f}$ ersetzt wird, so hat ∇ den Charakter eines Vektors. Deshalb erscheint auch die oben benutzte Schreibweise $[\nabla \mathfrak{A}]$ d. h. „Vektorprodukt aus ∇ und $\mathfrak{A}$“ gerechtfertigt.

---

1) Dieses Symbol wurde zuerst von Hamilton eingeführt. „Nabla“ bedeutet ein hebräisches Musikinstrument von ähnlicher Form.

Wir werden im folgenden an Beispielen den Begriff und die Anwendung des Operators ∇ erläutern und dabei einige Beziehungen ableiten, die für die Vektoranalysis von fundamentaler Bedeutung sind.

9. Anwendungen des Operators ∇. Auf Grund unserer Definition in Nr. 8 können wir folgende Ausdrücke hinschreiben.

(44)
$$\nabla p = \lim_{V=0} \frac{\int_F p\,d\mathfrak{f}}{V}$$

(45)
$$\nabla \mathfrak{A} = \lim_{V=0} \frac{\int_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}}{V}.$$

(46)
$$[\nabla \mathfrak{A}] = \lim_{V=0} \frac{\int_F [d\mathfrak{f}\mathfrak{A}]}{V} = -\lim_{V=0} \frac{\int_F [\mathfrak{A}\,d\mathfrak{f}]}{V}.$$

Wir sehen zunächst aus der rechten Seite von (44), daß ∇p ein Vektor ist, da das Integral eine Summe von Vektoren darstellt. Vorläufig ist das Volumen V vollständig willkürlich. Um (44) zu deuten, wollen wir eine durch den konstanten Einheitsvektor $\mathfrak{a}_0$ bestimmte Richtung im Raume willkürlich festlegen.

Fig. 10.

Multiplizieren wir (44) vor dem Übergang zur Grenze mit $\mathfrak{a}_0$, so erhalten wir rechter Hand $\frac{\int_F p\mathfrak{a}_0\,d\mathfrak{f}}{V}$. Dabei ist die Konstante $\mathfrak{a}_0$ unter das Integralzeichen gesetzt worden.

Als Volumen V nehmen wir jetzt einen Zylinder, dessen Erzeugende parallel $\mathfrak{a}_0$ ist, und dessen Grund- und Endfläche gleich df und senkrecht zu $\mathfrak{a}_0$ sind. Die Höhe des Zylinders sei da. Dann ist $V = df\,da$ (Fig. 10). Auf der Mantelfläche ist nach (12) überall $\mathfrak{a}_0 d\mathfrak{f} = 0$. Für die Grundfläche erhalten wir

$$\mathfrak{a}_0\,d\mathfrak{f}p = -p\,df,$$

weil die Normale zu $d\mathfrak{f}$ entgegengesetzt $\mathfrak{a}_0$ gerichtet ist, und für die Endfläche

$$\mathfrak{a}_0\,d\mathfrak{f}p = p\,df + \frac{dp}{da}\,da\,df.$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke ergibt das gesuchte Oberflächenintegral. Teilen wir es durch $V = df\,da$, und denken wir

uns den Übergang zur Grenze $V=0$ ausgeführt, so erhalten wir endgültig

$$(47) \qquad \mathfrak{a}_0 \nabla p = \frac{dp}{da}.$$

Haben wir ein skalares Produkt $\mathfrak{a}_0 \mathfrak{H}$ eines Einheitsvektors $\mathfrak{a}_0$ und eines bestimmten Vektors $\mathfrak{H}$, so ist klar, daß dieses Produkt dann seinen größten Wert annimmt, wenn $\mathfrak{a}_0$ mit der Richtung von $\mathfrak{H}$ zusammenfällt. Aus dieser Überlegung schließen wir, daß infolge von (47) der gemäß (44) gebildete Vektor ∇p in die Richtung der stärksten Änderung, des stärksten Anstieges von p fällt und dem Betrage nach gleich ist dem Differentialquotienten von p nach derselben Richtung. Man bezeichnet deshalb ∇p als den Anstieg oder Gradienten von p.

Außerdem geht aus (47) hervor, daß der Differentialquotient von p nach einer beliebigen Richtung durch das skalare Produkt von ∇p mit dem Einheitsvektor längs dieser Richtung bestimmt ist.

Wir wollen jetzt zur Deutung von (45) und (46) übergehen. Zunächst können wir vorausschicken, daß bei Konstanz von p und $\mathfrak{A}$ nach (19)

$$(48) \qquad \nabla p = \nabla \mathfrak{A} = [\nabla \mathfrak{A}] = 0$$

wird. Denn $\int d\mathfrak{f}$ ist identisch gleich Null für eine beliebige geschlossene Oberfläche.

Sind aber p und $\mathfrak{A}$ nicht konstant, so muß das entsprechende Oberflächenintegral der in Nr. 8 erwähnten Produkte eine kleine Größe der dritten Ordnung sein, damit dieses Produkt einen endlichen Wert erhält, weil doch V selbst klein von der dritten Ordnung ist.

Daraus ergibt sich die Deutung von

$$\nabla \mathfrak{A} = \lim_{V=0} \frac{\int_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}}{V}.$$

$d\mathfrak{f}\mathfrak{A}$ ist gleich der zum Flächenelement $d\mathfrak{f}$ normalen Komponente von $\mathfrak{A}$, multipliziert mit diesem Flächenelement $d\mathfrak{f}$. $\nabla \mathfrak{A}$ ist also der Mittelwert dieses Produkts längs der Oberfläche von V, berechnet auf die Einheit des Volumens, für eine bestimmte Stelle des Feldes von $\mathfrak{A}$. Da $d\mathfrak{f}\mathfrak{A}$ ein Skalar ist, so gilt dasselbe auch für $\nabla \mathfrak{A}$.

Etwas ganz Analoges können wir bezüglich $[\nabla\mathfrak{A}]$ sagen. Aus Nr. 4 ergibt sich, daß $[d\mathfrak{f}\mathfrak{A}]$ tangential zu der Oberfläche von V ist. Bezeichnen wir $[\mathfrak{n}\mathfrak{A}]$ durch $\mathfrak{r}$, so ersehen wir, daß $[\nabla\mathfrak{A}]$ den Mittelwert des tangentialen Vektors $\mathfrak{r}\,df$ längs der Oberfläche von V bedeutet, berechnet auf die Einheit des Volumens, auch für eine bestimmte Stelle des Feldes von $\mathfrak{A}$. Zugleich ergibt sich, daß $[\nabla\mathfrak{A}]$ ein Vektor ist.

Man bezeichnet gewöhnlich die linken Seiten von (45) und (46) durch

(49) $\nabla\mathfrak{A} = \operatorname{div}\mathfrak{A}$ (Sprich: Divergenz $\mathfrak{A}$)

und

(50) $[\nabla\mathfrak{A}] = \operatorname{curl}\mathfrak{A}$ (Sprich: Körl $\mathfrak{A}$)[1])

oder auch

(50a) $[\nabla\mathfrak{A}] = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ (Sprich: Rotation $\mathfrak{A}$ oder Rotor $\mathfrak{A}$).

Es bedeuten demnach diese Bezeichnungen div und curl oder rot, Abkürzungen für die in (45) und (46) angedeuteten Operationen an dem Vektor $\mathfrak{A}$. Zugleich sollen uns diese Abkürzungen daran erinnern, daß wir es mit Operationen an einem Vektor zu tun haben. Außerdem ersehen wir, daß div stets ein Skalar und curl oder rot stets ein Vektor ist.

Erste Bemerkung. Diese Bezeichnungen sind bei der physikalischen Anwendung der Ausdrücke $\nabla\mathfrak{A}$ und $[\nabla\mathfrak{A}]$ entstanden.

Es sei $\mathfrak{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit eines Gases nach Größe und Richtung für einen bestimmten Punkt des Raumes. Dann fließt in der Zeiteinheit durch das Flächenelement $d\mathfrak{f}$ die Menge $\varrho\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}$, wo ϱ die Dichte des Gases an der betreffenden Stelle bedeutet. Infolgedessen gibt $\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{v})$ an, um wieviel aus der Volumeneinheit in der Zeiteinheit mehr Gas entwichen als eingeströmt ist. Dabei ändert sich aber die Dichte ϱ, und zwar verkleinert sie sich in der Zeiteinheit um $\frac{d\varrho}{dt} = -\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{v})$, falls $\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{v})$ positiv ist. Es ist demnach

(a) $$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div}(\varrho\mathfrak{v}) = 0.$$

Wir denken uns jetzt eine gerade Maschinenwelle, die sich um eine im Raume feste Achse dreht mit einer konstanten Winkel-

1) curl ist ein englisches Wort und bedeutet: Locke, Windung.

geschwindigkeit w. Aus dieser Welle schneiden wir einen Kreiszylinder heraus mit dem Radius R und der Höhe h, konzentrisch zur Drehachse. Die zur Achse senkrechten Endflächen bezeichnen wir durch f_1 und f_2.

Bezeichnet $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit irgendeines Punktes dieses Zylinders in der Entfernung r von der Achse, so ist der Betrag von $\mathfrak{v}$ gleich rw; die Richtung von $\mathfrak{v}$ ist senkrecht zur Achse und soll einer Rechtsdrehung entsprechen. Bedeutet $\mathfrak{r}_0$ den Einheitsvektor längs r, von der Achse aus gerechnet, und $\mathfrak{k}_0$ denjenigen längs der Achse, so ist

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{v} = rw\,[\mathfrak{k}_0 \mathfrak{r}_0].$$

Wir nehmen das Volumen des Zylinders als klein an und gleich V in (46) und bestimmen $[\nabla \mathfrak{v}]$.

Für die beiden Endflächen wird nach (29)

$$\int_{f_{1,2}} [d\mathfrak{f}\mathfrak{v}] = w\int_{f_{1,2}} r\,[d\mathfrak{f}\,[\mathfrak{k}_0\mathfrak{r}_0]] = \pm\, w\int_{f_{1,2}} r\mathfrak{r}_0 df = 0,$$

da auf jeder dieser Flächen immer zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von $r\mathfrak{r}_0$ vorhanden sind.

Für die Mantelfläche M haben wir

$$\int_M [d\mathfrak{f}\mathfrak{v}] = w\int_M R[d\mathfrak{f}[\mathfrak{k}_0\mathfrak{r}_0]] = w\int_M \mathfrak{k}_0 R\, df = 2\pi R^2 h w \mathfrak{k}_0,$$

und da das Volumen des Zylinders gleich $\pi R^2 h$ ist, so folgt aus (46)

$$\text{(c)} \qquad [\nabla \mathfrak{v}] = \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 2 w \mathfrak{k}_0.$$

Es ist deshalb der halbe Betrag von rot $\mathfrak{v}$, gleich der Winkelgeschwindigkeit der Drehung. Die Richtung von rot $\mathfrak{v}$ ist durch die Drehachse gegeben.

Zweite Bemerkung: Um die Bedeutung von ∇p ebenfalls durch eine Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen, schreibt man auch[1])

$$\text{(51)} \qquad \nabla p = \operatorname{grad} p \text{ (Sprich: Gradient } p).$$

1) Wir werden, der bequemeren Schreibweise wegen, den Gradienten von p dennoch meist durch ∇p ausdrücken. Eine Verwechslung mit (45) ist bei konsequenter Anwendung der Schreibweise div ausgeschlossen, so daß man in ∇p unter p stets einen Skalar verstehen muß.

Wir kehren jetzt zu dem Ausdruck

$$\text{div}\,\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A} = \lim_{V=0}\frac{\int\limits_F \mathfrak{A}\,d\mathfrak{f}}{V} \tag{45}$$

zurück und ersetzen $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}p$, wo p einen Skalar bedeutet.

Bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}_1$ und p_1 die Werte von $\mathfrak{A}$ und p für einen festen Punkt innerhalb eines Raumes vom Volumen V, so können wir für die Punkte seiner Oberfläche schreiben

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + d\mathfrak{A}; \qquad p = p_1 + dp \tag{52}$$

und erhalten dann aus (45)

$$\nabla\mathfrak{A}p = p_1 \lim_{V=0}\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}}{V} + \lim_{V=0}\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\,dp\,\mathfrak{A}}{V} = p\nabla\mathfrak{A} + \lim_{V=0}\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\,dp\,\mathfrak{A}}{V}. \tag{d}$$

Hier ist im ersten Glied p statt p_1 gesetzt, weil beim Grenzübergang $V = 0$ wegen (52) $p_1 = p$ wird.

Mit Rücksicht auf (48) und (52) können wir statt des letzten Gliedes in (d) schreiben, wenn wir für den Augenblick den Grenzübergang beiseite lassen:

$$\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\,dp\,\mathfrak{A}}{V} + \nabla\mathfrak{A}_1 p_1 = \mathfrak{A}_1\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\,dp}{V} + \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\,dp\,d\mathfrak{A}}{V} + \nabla\mathfrak{A}_1 p_1 =$$

$$= \mathfrak{A}_1\frac{\int\limits_F p\,d\mathfrak{f}}{V} + \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\,dp\,d\mathfrak{A}}{V} = \mathfrak{A}_1\nabla p + \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\,dp\,d\mathfrak{A}}{V}.$$

Unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung und weil $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$ für $V = 0$ wird, finden wir die endgültige Formel:

$$\nabla\mathfrak{A}p = p\nabla\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\nabla p \tag{53}$$

oder

$$\text{div}\,\mathfrak{A}p = p\,\text{div}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\nabla p \tag{54}$$

oder endlich auch

$$\text{div}\,\mathfrak{A}p = p\,\text{div}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\,\text{grad}\,p. \tag{54a}$$

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_0 = \text{konst.}$, so folgt aus (53) wegen (48) die Beziehung (47).

Auf ganz analoge Weise können wir beweisen, daß wir für das Produkt pq zweier Skalare haben werden:

$$\nabla pq = p\nabla q + q\nabla p \tag{55}$$

oder

$$\operatorname{grad} pq = p \operatorname{grad} q + q \operatorname{grad} p. \tag{56}$$

Aus den angeführten Beispielen ersehen wir, daß das in Nr. 8 eingeführte „Produkt" vollkommen dem Differentialquotienten der gewöhnlichen Analysis analog ist.

Denn für diesen haben wir $\frac{dm}{dt} = 0$, falls $m =$ konst. ist, und $\frac{dma}{dt} = m\frac{da}{dt} + a\frac{dm}{dt}$ für das Produkt ma. Ist a konstant, so ist $\frac{dma}{dt} = \frac{adm}{dt}$.

Wir können deshalb das erwähnte Produkt als eine gewisse Raumdifferentiation auffassen und es im Anschluß an die Bezeichnungsweise der Differentialrechnung als vektoriellen Differentialquotienten bezeichnen und zwar von der ersten Ordnung, wenn ∇ in diesem Produkt nur einmal auftritt.

10. Weitere Beispiele für den vektoriellen Differentialquotienten erster Ordnung. Nach Nr. 8 können wir schreiben

$$\mathfrak{A}\nabla \cdot \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = \lim_{V=0} \frac{\int\limits_F \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{B}}{V}. \tag{57}$$

Hierbei ist, nach Definition, bei der Integration $\mathfrak{A}$ als konstant zu betrachten. Analog erhalten wir, nach (49)

$$\mathfrak{A} \cdot \nabla\mathfrak{B} = \lim_{V=0} \frac{\int\limits_F \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f}\mathfrak{B}}{V} = \mathfrak{A} \lim_{V=0} \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{B}}{V} = \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{B}. \tag{58}$$

Die Stellung des Punktes unter den Integralen in (57) und (58) bestimmt sich durch das anfangs Nr. 5 Gesagte.

Deshalb sind auch die Punkte auf den linken Seiten von (57) und (58) verständlich, da doch ∇ durch $d\mathfrak{f}$ ersetzt wird. Anstatt eines Punktes kann man, wie vielfach üblich, auch Klammern benützen (vergl. 57).

Um uns die Bedeutung von (57) klar zu machen, nehmen wir als Volumen V einen Zylinder, dessen Erzeugende parallel der Richtung von $\mathfrak{A}$ im Punkte P ist. Die Grund- und Endfläche mögen senkrecht zu dieser Richtung sein (Fig. 11). Da $\mathfrak{A}$ bei der Integration als konstant zu betrachten ist, so wird für die Mantelfläche $\mathfrak{A}\,d\mathfrak{f} = 0$ sein.

Für die Grundfläche, welche durch P geht, ist

$$\mathfrak{A}\,d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{B} = -|\mathfrak{A}|\,df\cdot\mathfrak{B}$$

und für die Endfläche wegen (33)

$$\mathfrak{A}\,d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{B}' = |\mathfrak{A}|\,df(\mathfrak{B} + d\mathfrak{B}).$$

Fig 11.

Die Summe ergibt das gesuchte Oberflächenintegral. Teilen wir es durch das Volumen $V = df\,da$, wo da den Betrag eines Linienelements in der Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ im Punkte P bedeutet, so wird:

$$(59) \qquad (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}|\frac{d\mathfrak{B}}{da}$$

d. h. der Ausdruck (57) ist nichts anderes als die auf die Längeneinheit bezogene Änderung von $\mathfrak{B}$ in derjenigen Richtung, die dem Vektor $\mathfrak{A}$ im Punkte P entspricht, multipliziert mit dem Betrag, den $\mathfrak{A}$ im Punkte P annimmt.

Hierdurch erscheint die eingeführte Benennung „vektorieller Differentialquotient“ vollkommen berechtigt. Zugleich ist durch (59) die im Anfang von Nr. 8 gesuchte Beziehung bestimmt.

Wir wollen jetzt den Ausdruck

$$(60) \qquad \nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = \lim_{V=0}\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}}{V}$$

bestimmen. Da hier $\mathfrak{A}$ hinter dem Operator ∇ steht, so ist es bei der Integration als variabel zu betrachten. Bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ die Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für einen festen Punkt innerhalb V, so erhalten wir, mit Rücksicht auf (52), analog (53), unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung:

$$\nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = \lim\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{B}}{V} + \lim\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}_1}{V} =$$

$$= \lim\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{B}}{V} + \mathfrak{B}_1\lim\frac{\int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}}{V}$$

oder wegen (57) und (45), falls wir nach dem Grenzübergang statt $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, wieder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ schreiben:

$$\nabla \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{A} \tag{61}$$

oder auch

$$\nabla \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A}. \tag{61a}$$

Vertauschen wir in (61) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ miteinander und ziehen den so erhaltenen Ausdruck von (61) ab, so folgt, unter Berücksichtigung von (57), (29) und (46)

$$\left\{\begin{aligned} \nabla \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} - \nabla \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} &= \lim^F \frac{\int df \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}}{V} - \lim^F \frac{\int df \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}}{V} = \\ &= \lim^F \frac{\int [df [\mathfrak{B} \mathfrak{A}]]}{V} = [\nabla [\mathfrak{B} \mathfrak{A}]] = \\ &= (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} - (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \cdot \nabla \mathfrak{B} \end{aligned}\right. \tag{62}$$

oder

$$\operatorname{rot} [\mathfrak{B} \mathfrak{A}] = (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} - (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{B}. \tag{63}$$

Es sei hierbei noch einmal hervorgehoben, daß die Reihenfolge der Vektoren in einem Produkt außerordentlich wichtig ist. Denn wie aus (61) folgt, ist $\nabla \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A}$ durchaus verschieden; sie sind nur gleich, falls $\mathfrak{B}$ konstant ist, da eben ∇ ein Differentialoperator ist. Dasselbe gilt von den Produkten $[\nabla \mathfrak{A}] \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} [\nabla \mathfrak{A}]$.

Wir erhalten

$$\text{(a)} \quad [\nabla \mathfrak{A}] \mathfrak{B} = \lim^F \frac{\int [df \mathfrak{A}] \mathfrak{B}}{V} = \lim^F \frac{\int df [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]}{V} = \nabla [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \operatorname{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}].$$

Hieraus folgt in bekannter Weise, unter Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} \nabla [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \lim^F \frac{\int df [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]}{V} &= \lim^F \frac{\int df [\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}]}{V} + \lim^F \frac{\int df [\mathfrak{A} \mathfrak{B}_1]}{V} \\ &= - \mathfrak{A}_1 \lim^F \frac{\int [df \mathfrak{B}]}{V} + \mathfrak{B}_1 \lim^F \frac{\int [df \mathfrak{A}]}{V} \end{aligned}$$

oder

$$\nabla[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\nabla\mathfrak{A}] - \mathfrak{A}[\nabla\mathfrak{B}] \tag{64}$$

oder endlich

$$\operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}. \tag{65}$$

11. Die Behandlung von ∇ als Vektor. Bis jetzt haben wir die vektoriellen Differentialquotienten auf Grund der Definition in Nr. 8 bestimmt und mit Hilfe von Grenzübergängen tatsächlich berechnet. Es läßt sich aber zeigen, daß viele derartige Berechnungen sich viel einfacher gestalten, wenn wir ∇ als einen besondern Vektor auffassen und mit ihm gemäß Nr. 3, 4 und 5 rechnen unter Einhaltung gewisser Regeln. Wir wollen dies hier näher erläutern.

Vergleichen wir den Ausdruck (a) Nr. 10

$$[\nabla\mathfrak{A}]\mathfrak{B} = \nabla[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \tag{a}$$

mit (27), dann sehen wir, daß der Operator ∇ in (a) wie ein Vektor behandelt worden ist, wobei aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf beiden Seiten von (a) hinter ∇ geschrieben sind.

Wäre ∇ ein gewöhnlicher Vektor, so hätten wir anstatt der linken Seite von (a) auch $\mathfrak{B}[\nabla\mathfrak{A}]$ schreiben können. Dies ist aber nur dann erlaubt, wenn $\mathfrak{B}$ = konst. ist, d. h. es ist

$$\nabla[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\nabla\mathfrak{A}] \text{ oder } \operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}, \text{ falls } \mathfrak{B} = \text{constant}. \tag{b}$$

Es fragt sich, wie können wir von (a) zu (64) übergehen, bei der Behandlung von ∇ als Vektor.

Zu dem Zweck behalten wir (27) im Auge und behandeln $\nabla[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ einmal unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}$ konstant ist, und das andere Mal unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ konstant ist. Wir bekommen bei der ersten Voraussetzung $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\nabla]$, wofür wir unbedingt $-\mathfrak{A}[\nabla\mathfrak{B}]$ schreiben müssen, da ∇ nur einen Sinn hat, wenn es in Verbindung mit $\mathfrak{B}$ *vor* dieser Größe steht. Das negative Zeichen tritt auf, da ein Vektorprodukt das kommutative Gesetz nicht befolgt.

Bei der zweiten Voraussetzung $\mathfrak{B}$ = konst. erhalten wir $\mathfrak{B}[\nabla\mathfrak{A}]$. Die Summe beider Ausdrücke ergibt (64).

Verallgemeinern wir dies, so kommen wir zu folgendem Resultat.

Gegeben sei ein beliebiger vektorieller Differentialquotient erster Ordnung. *Wir können hierbei ∇ als einen Vektor auf-*

fassen und alle Regeln der Multiplikation von Vektoren anwenden unter Innehaltung folgender Vorschrift:

Alle diejenigen Operationen, wo die im vektoriellen Differentialquotienten *nach* ∇ stehenden Größen nicht vor ∇ gebracht zu werden brauchen, sind gemäß Nr. **3, 4, 5** zu erledigen. So erhalten wir aus (29)

$$[\nabla[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]] = \nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} - \nabla\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} \tag{66}$$

d. h. den Ausdruck (62). Nach (29) hätten wir ebensogut $\mathfrak{B}\cdot\nabla\mathfrak{A}$ statt $\nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ schreiben können, falls ∇ ein gewöhnlicher Vektor wäre. Das hätte den Regeln der Multiplikation von Vektoren nicht widersprochen. Hier *aber müssen* wir den Ausdruck $\nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ *unbedingt beibehalten*. Denn auf der linken Seite von (66) steht $\mathfrak{B}$ hinter ∇, und deshalb muß es vorläufig auch auf der rechten Seite hinter ∇ stehen.

Nachdem dieser Teil der Transformation ausgeführt ist, versuche man die *hinter* ∇ stehenden Größen sukzessive *vor* ∇ zu bringen. Zu diesem Zwecke betrachte man sukzessive alle Größen bis auf eine als unveränderlich und wende die Transformationen von Nr. **3, 4** und **5** so oft an, als Größen hinter ∇ stehen. Alle so gewonnenen Ausdrücke werden dann addiert; so erhält man schließlich eine Summe vektorieller Differentialquotienten, die jedesmal hinter ∇ nur eine Veränderliche enthalten.

Betrachtet man z. B. $\mathfrak{A}$ als konstant, so ist nach (57) $\nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$. Ist aber $\mathfrak{B}$ = konstant, so finden wir $\nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\cdot\nabla\mathfrak{A}$. Die Summe ergibt den allgemeinen Ausdruck (61).

Wir wollen diese Regeln auf die Ermittelung des Ausdruckes $\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ anwenden.

Betrachten wir ∇ als Vektor, so sehen wir aus (29), daß die Transformation des gegebenen Ausdruckes mit einer Umstellung von ∇ bezüglich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verbunden ist. Wir nehmen deshalb einmal $\mathfrak{A}$ als konstant an und erhalten laut (29)

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = [\mathfrak{A}[\nabla\mathfrak{B}]] + (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}.$$

Nehmen wir $\mathfrak{B}$ als konstant an, so folgt ein ähnlicher Ausdruck, nur sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ miteinander vertauscht. Die Summe dieser beiden Ausdrücke liefert:

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}[\nabla\mathfrak{B}]] + [\mathfrak{B}[\nabla\mathfrak{A}]] \tag{67}$$

oder

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \operatorname{grad}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}]. \tag{68}$$

Wir überlassen es dem Leser, die Richtigkeit von (67) direkt mit Hilfe von (44) und (29) zu verifizieren.

Als weiteres Beispiel wollen wir den Ausdruck $[\nabla \mathfrak{A} p] = \text{rot}(\mathfrak{A} p)$ transformieren.

Halten wir p konstant, so folgt $p[\nabla \mathfrak{A}] = p \, \text{rot} \, \mathfrak{A}$. Nehmen wir aber $\mathfrak{A}$ konstant an, so erhalten wir $-[\mathfrak{A} \nabla p]$. Das Minuszeichen erscheint, da wir das konstante $\mathfrak{A}$ vor ∇ setzen müssen und da das vektorielle Produkt das kommutative Gesetz nicht befolgt. Wir erhalten demnach

$$(69) \qquad [\nabla \mathfrak{A} p] = \text{rot}\,(\mathfrak{A} p) = p \, \text{rot} \, \mathfrak{A} - [\mathfrak{A} \nabla p].$$

Der direkte Beweis dieser Gleichung ist mit Hilfe von (46), wo $\mathfrak{A} p$ statt $\mathfrak{A}$ zu setzen ist, leicht zu erbringen.

Es mögen hier noch einige Ausdrücke folgen, die wir später brauchen werden.

Aus (67) gewinnen wir, falls $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist

$$(70) \qquad \text{grad}\, \mathfrak{A}^2 = \nabla \mathfrak{A}^2 = 2(\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{A} + 2[\mathfrak{A} \, \text{rot} \, \mathfrak{A}].$$

Multiplizieren wir dies skalar mit einem Vektor $\mathfrak{B}$, so folgt

$$(71) \qquad \begin{cases} \mathfrak{B} \nabla \mathfrak{A}^2 = 2\mathfrak{B}(\mathfrak{A} \nabla)\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}[\mathfrak{A} \, \text{rot} \, \mathfrak{A}] = \\ \qquad = 2\mathfrak{B}(\mathfrak{A} \nabla)\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}[\mathfrak{B} \, \text{rot} \, \mathfrak{A}]. \end{cases}$$

Anderseits haben wir

$$(72) \qquad \mathfrak{C}(\mathfrak{A} \nabla)\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{C}),$$

falls wir $\mathfrak{C}$ unter dem Operationszeichen ∇ als konstant betrachten. Dies folgt aus den oben entwickelten Regeln. Der direkte Beweis fließt aus (57) für konstantes $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \nabla)\mathfrak{B} = \lim \frac{\int\limits_F \mathfrak{A} d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{V} = \mathfrak{A} \lim \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{V} = \mathfrak{A} \nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Wegen der Konstanz von $\mathfrak{C}$ erhalten wir aus (72) und (68)

$$(73) \qquad \mathfrak{C}(\mathfrak{A} \nabla)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{C} \nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}[\mathfrak{C} \, \text{rot} \, \mathfrak{B}].$$

Ersetzen wir hier $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$, so ergibt sich aus (71):

$$(74) \qquad \mathfrak{B} \nabla \mathfrak{A}^2 = 2\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \nabla)\mathfrak{A}.$$

12. Vektorielle Differentialquotienten zweiter Ordnung. Unter einem vektoriellen Differentialquotienten zweiter Ordnung wollen wir ein solches Produkt verstehen, wo der Operator ∇ zweimal vorkommt. Berechnet wird dieser Differentialquotient nach der Regel in Nr. 8, wobei aber statt des ersten ∇, von links aus gerechnet, $d\mathfrak{f}$ eingesetzt wird. Hiernach ist

$$[\nabla[\nabla\mathfrak{A}]] = \lim_{V=0} \frac{\int_F [d\mathfrak{f}[\nabla\mathfrak{A}]]}{V}. \tag{75}$$

Dies folgt aber auch aus (46), falls wir dort $\mathfrak{A}$ durch $[\nabla\mathfrak{A}] = \text{rot}\,\mathfrak{A}$ ersetzen.

Weiter können wir schreiben

$$\nabla\nabla\cdot\mathfrak{A} = \nabla^2\mathfrak{A} = \lim \frac{\int_F (d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{A}}{V} \tag{76}$$

$$\nabla\cdot\nabla\mathfrak{A} = \nabla\,\text{div}\,\mathfrak{A} = \lim \frac{\int_F d\mathfrak{f}\cdot\nabla\mathfrak{A}}{V}. \tag{77}$$

Unter den Integralen steht $d\mathfrak{f}$, laut Definition, vor ∇, und das deutet darauf hin, daß $d\mathfrak{f}$ bezüglich dieses Operators als konstant anzusehen ist. Es war dies auch der Grund zur obigen Definition, das erste ∇-zeichen durch $d\mathfrak{f}$ zu ersetzen, und entspricht dem Sinn nach den Ausdrücken (44), (45) und (46). Wir erhalten deshalb aus (66), falls wir dort $\mathfrak{B}$ durch $d\mathfrak{f}$ ersetzen,

$$[\nabla[d\mathfrak{f}\mathfrak{A}]] = d\mathfrak{f}\cdot\nabla\mathfrak{A} - (d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{A}. \tag{78}$$

Multiplizieren wir anderseits (46) vektoriell mit ∇, so erhalten wir:

$$[\nabla[\nabla\mathfrak{A}]] = \lim\left[\nabla\frac{\int_F [d\mathfrak{f}\mathfrak{A}]}{V}\right] = \lim\frac{\int_F [\nabla[d\mathfrak{f}\mathfrak{A}]]}{V}$$

oder mit Rücksicht auf die vorstehenden Gleichungen:

$$[\nabla[\nabla\mathfrak{A}]] = \nabla\cdot\nabla\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A} \tag{79}$$

oder auch wegen (75) und (46):

$$\text{rot}\cdot\text{rot}\,\mathfrak{A} = \text{rot}^2\,\mathfrak{A} = \nabla\,\text{div}\,\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}. \tag{79 a}$$

Daß wir ∇ unter das Integral bringen konnten, rechtfertigt sich dadurch, daß der Definition gemäß

$$[\nabla(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})] = [\nabla\mathfrak{A}] + [\nabla\mathfrak{B}]$$

ist und eine Integration doch nichts anderes als eine Summation bedeutet.

Der Ausdruck (79) beweist, daß wir ∇ auch bei dem vektoriellen Differentialquotienten zweiter Ordnung als Vektor ansehen können, unter Einhaltung der in **11** angegebenen Regeln. Wie man sofort sieht, ergibt sich nämlich (79) direkt aus (29), falls man ∇ als Vektor auffaßt.

Ähnlich erhalten wir nach (22)

$$\text{rot}\,\nabla p = [\nabla \nabla p] = [\nabla \nabla] p = 0 \tag{80}$$

und nach (27):

$$\text{div rot}\,\mathfrak{A} = \nabla[\nabla \mathfrak{A}] = [\nabla \nabla]\mathfrak{A} = 0. \tag{81}$$

Wir werden später in Nr. **13** und **14** die Ausdrücke (80) und (81) auf eine andere Weise ableiten.

Multiplizieren wir (44) skalar mit ∇, so erhalten wir

$$\nabla(\nabla p) = \lim \nabla \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f} p}{V}.$$

Laut Definition des vektoriellen Differentialquotienten zweiter Ordnung muß das erste ∇ durch $d\mathfrak{f}$ ersetzt werden. Es ist deshalb

$$\nabla(\nabla p) = \lim \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f} \nabla p}{V},$$ und wir erhalten

$$\lim \nabla \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f} p}{V} = \lim \frac{\int\limits_F d\mathfrak{f} \nabla p}{V} \tag{a}$$

oder wegen (45), wo $\mathfrak{A}$ durch ∇p ersetzt zu denken ist:

$$\text{div}\,\nabla p = \nabla \cdot \nabla p = \nabla^2 p. \tag{82}$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Gleichung

$$\nabla^2 p = 0 \tag{83}$$

als die Laplacesche Gleichung bezeichnet wird, nennt man den Operator ∇^2 Laplaceschen Operator und bezeichnet ihn auch abgekürzt durch Δ.

Wir nehmen jetzt an, $\mathfrak{A} = p\mathfrak{B}$, und setzen $\mathfrak{B}$ als konstant voraus. Es folgt dann aus (57) und (44)

$$(d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{f}\nabla p$$

und wegen (76) und (82)

$$\nabla^2\mathfrak{A} = \nabla^2 p\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \nabla^2 p = \mathfrak{B} \operatorname{div} \nabla p. \tag{84}$$

Wir haben hervorgehoben, daß in einem Produkt die hinter dem Operator ∇ stehenden Größen als veränderlich zu betrachten sind. Wenn im folgenden dennoch einige davon als konstant bezüglich ∇ betrachtet werden, so geschieht dies erstens aus Analogie mit der gewöhnlichen Analysis und zweitens wegen der in manchen Fällen bequemeren Schreibweise. Mißverständnisse werden wohl hieraus nicht entstehen können, denn aus der Ableitung der entsprechenden Ausdrücke wird es leicht zu erkennen sein, welche von den Größen als veränderlich zu betrachten sind.

Kapitel III.

Integraloperationen.

13. Die Operation rot, der Stokessche Satz und andere Linienintegrale. Wir wenden uns jetzt wieder zu dem Ausdruck (46) und multiplizieren beiderseits skalar mit dem konstanten Einheitsvektor $\mathfrak{n}$. Es folgt dann

$$\mathfrak{n}[\nabla\mathfrak{A}] = \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \lim \frac{\int\limits_F \mathfrak{n}[d\mathfrak{f}\mathfrak{A}]}{V} = \lim \frac{\int\limits_F \mathfrak{A}[\mathfrak{n}d\mathfrak{f}]}{V}. \tag{85}$$

Als Volumen V nehmen wir wieder einen Zylinder an, (Fig. 12), dessen Erzeugende parallel $\mathfrak{n}$ ist, und dessen Grund- und Endfläche senkrecht zu $\mathfrak{n}$ sind. Die Höhe h sei klein im Vergleich zu den linearen Dimensionen der obigen Flächen. Wir erhalten für diese beiden Flächen

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{n}d\mathfrak{f}] = 0$$

und für ein Element $d\mathfrak{f}$ der Mantelfläche

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{n}d\mathfrak{f}] = h \cdot \mathfrak{A}d\mathfrak{l},$$

Fig. 12.

wo $d\mathfrak{l}$ ein Linienelement der Begrenzungskurve der Endfläche bedeutet. Der Umlaufssinn d. h. die Richtung von $d\mathfrak{l}$ bestimmt

sich aus der Fingerregel $\{\mathfrak{n}$ — Daumen; $d\mathfrak{f}$, die äußere Normale zur Mantelfläche — Mittelfinger; $d\mathfrak{l}$ — Zeigefinger$\}$. Infolge der Annahme, daß h klein gegen die linearen Dimensionen der Endfläche ist, konnten wir $\mathfrak{A}$ als konstant längs der Erzeugenden des Zylinders annehmen. Addieren wir die obigen Ausdrücke für die Grund-, End- und Mantelfläche, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (85)

$$\mathfrak{n}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \lim \frac{h\int_L \mathfrak{A}\,d\mathfrak{l}}{V} = \lim_{f_1=0,\,h=0} \frac{\int_L \mathfrak{A}\,d\mathfrak{l}}{f_1}, \tag{86}$$

wo f_1 die Endfläche und L die Begrenzungskurve bedeutet. Wir müssen uns in (86) zuerst den Grenzübergang zu $h = 0$ denken und nachträglich zu $f_1 = 0$. Dann fallen Grund- und Endfläche zusammen, und die positive Normale zu f_1 wird gleich $\mathfrak{n}$.

Gegeben sei jetzt eine endliche Fläche f von beliebiger Gestalt, längs welcher $\mathfrak{A}$ stetig ist. Wir teilen f in unendlich kleine Elemente, von welchen wir jedes als eben betrachten können. Wenden wir auf jedes dieser Elemente den Ausdruck (86) an, multiplizieren beiderseits mit $df = f_1$ und summieren, resp. integrieren über die ganze Fläche f, so erhalten wir, unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{n}$, d. h. die Normale zu einem Flächenelement, überall nach einer Seite der Fläche f gerichtet ist,

$$\int_f df\,\mathfrak{n}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \int_f \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\cdot d\mathfrak{f} = \int_L \mathfrak{A}\,d\mathfrak{l}, \tag{87}$$

wo rechts das Linienintegral von $\mathfrak{A}$ längs der Begrenzungskurve L der Fläche f gesetzt ist. Dieses ergibt sich aus folgender Überlegung: Wegen der einseitigen Richtung von $\mathfrak{n}$ wird der gemeinschaftliche Teil der Begrenzungskurven zweier nebeneinander liegenden Flächenelemente im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden (Fig. 13), infolgedessen fallen, bei der Summation der rechten Seiten von (86), die Linienintegrale längs den inneren Begrenzungskurven fort, und es bleibt nur das längs der äußeren Begrenzungskurve zu f genommene Linienintegral übrig.

Fig. 13.

Der Ausdruck (87) bildet den sogenannten **Stokesschen** Satz; er gestattet uns ein Linienintegral in ein Flächenintegral umzuwandeln.

Ist f eine geschlossene Oberfläche, also gleich F, und $\mathfrak{n}$ die äußere Normale, so folgt aus (87)

$$\int_F d\mathfrak{f} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0. \tag{88}$$

Denn wir können diese Oberfläche durch eine auf derselben befindliche Kurve in zwei Teile zerlegen und dann auf jeden derselben (87) anwenden und hinterher summieren. Da aber $\mathfrak{n}$ ständig die äußere Normale bedeutet, so fallen bei dieser Summation die beiden, im entgegengesetzten Sinne genommenen Linienintegrale längs der gemeinsamen Begrenzungskurve fort.

Ersetzen wir in (87) $\mathfrak{A}$ durch ∇p, so erhalten wir nach (47)

$$\int_f \mathfrak{n} \operatorname{rot} \nabla p \cdot df = \int_L \nabla p \cdot d\mathfrak{l} = \int_L \frac{dp}{dl} dl = \int_L dp = 0, \tag{89}$$

falls p stetig und eindeutig längs der Kurve L ist. Da f und L beliebig sind, so folgt hieraus

$$\operatorname{rot} \nabla p = 0, \tag{a}$$

in Übereinstimmung mit (80). (Siehe diesbezüglich den Schluß von Nr. **24**.)

Wir wollen jetzt das Integral $\mathfrak{A} = \int_L p\, d\mathfrak{l}$ bestimmen. Zu dem Zweck multiplizieren wir diesen Ausdruck beiderseits skalar mit einem konstanten Vektor $\mathfrak{r}$. Wir erhalten dann wegen (87) und (69)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r} = \int_L \mathfrak{r} p\, d\mathfrak{l} = \int_f \mathfrak{n} \operatorname{rot} (\mathfrak{r} p) df = -\int_f df \cdot \mathfrak{n}[\mathfrak{r} \nabla p] =$$
$$= \int_f df \cdot \mathfrak{r}[\mathfrak{n} \nabla p] = \mathfrak{r} \int_f [d\mathfrak{f} \nabla p]$$

oder da $\mathfrak{r}$ beliebig gerichtet sein kann:

$$\mathfrak{A} = \int_L p\, d\mathfrak{l} = \int_f [d\mathfrak{f} \nabla p] = \int_f [\mathfrak{n} \nabla p] df. \tag{90}$$

14. Der Gaußsche Satz und andere Oberflächenintegrale. Multiplizieren wir (45) beiderseits mit dem Volumenelement dv und integrieren über ein endliches Volumen V, so erhalten wir

$$\int_V \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot dv = \int_F d\mathfrak{f} \mathfrak{A}. \tag{91}$$

Dies folgt aus Überlegungen ähnlich denen, welche wir bei der Ableitung des **S t o k e s**schen Satzes angewandt haben. Denn bei der Summierung der rechten Seiten von (45) werden die aneinander grenzenden Oberflächen der einzelnen Volumenelemente mit entgegengesetzten Normalen auftreten, da als Normale stets die äußere genommen wird. Deshalb fallen bei dieser Summierung alle Oberflächenintegrale für die inneren Volumenelemente fort, und es bleibt nur das in (91) stehende Oberflächenintegral über die äußere Fläche F. Es ist deshalb klar, daß in (91) als positive Normale die äußere genommen werden muß.

Der Ausdruck (91) heißt der **G a u ß**sche Satz und ermöglicht uns, ein Flächenintegral über eine geschlossene Oberfläche in ein Volumenintegral umzuwandeln.

Ersetzen wir in (91) $\mathfrak{A}$ durch rot $\mathfrak{A}$, so folgt wegen (88)

$$\int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, dv = 0$$

oder, da dies für ein beliebiges V gilt,

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$$

in Übereinstimmung mit (81).

Wir wollen jetzt das Integral $\mathfrak{A} = \int_F p\, d\mathfrak{f}$ ermitteln. Hierzu multiplizieren wir es skalar mit dem konstanten Vektor $\mathfrak{r}$, dann erhalten wir nach dem **G a u ß**schen Satz (91)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r} = \int_F \mathfrak{r} p\, d\mathfrak{f} = \int_V \operatorname{div} \mathfrak{r} p \cdot dv$$

oder auf Grund von (54), da $\operatorname{div} \mathfrak{r} = 0$ ist,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r} = \mathfrak{r} \int_V \nabla p \cdot dv.$$

Da aber $\mathfrak{r}$ beliebig gerichtet sein kann, so erhalten wir endgültig

$$\text{(92)} \qquad \int_F p\, d\mathfrak{f} = \int_V \nabla p \cdot dv,$$

d. h. das vektorielle Oberflächenintegral eines Skalars ist gleich dem Raumintegral seines Gradienten.

Ganz analog läßt sich auch das Integral $\mathfrak{A} = \int\limits_F [\mathfrak{B} d\mathfrak{f}]$ bestimmen. Multiplizieren wir wieder mit dem konstanten $\mathfrak{r}$, so erhalten wir nach (27) und (91),

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r} = \int\limits_F \mathfrak{r}[\mathfrak{B} d\mathfrak{f}] = \int\limits_F d\mathfrak{f}[\mathfrak{r}\mathfrak{B}] = \int\limits_V \operatorname{div}[\mathfrak{r}\mathfrak{B}] dv$$

oder laut (65), da $\operatorname{rot}\mathfrak{r} = 0$ ist,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r} = -\mathfrak{r}\int\limits_V \operatorname{rot}\mathfrak{B}\, dv$$

und endlich, da $\mathfrak{r}$ beliebig ist,

$$\int\limits_F [d\mathfrak{f}\mathfrak{B}] = \int\limits_V \operatorname{rot}\mathfrak{B}\cdot dv, \tag{93}$$

d. h. das vektorielle Oberflächenintegral eines Vektors ist gleich dem Raumintegral seines Rotors, wobei sich das Vorzeichen des Raumintegrals durch die Reihenfolge von $d\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmt. Selbstverständlich können wir (92) und (93) auch direkt aus (44) und (46) ableiten, genau so wie den Gaußschen Satz aus (45). Endlich erhalten wir aus (76)

$$\int\limits_V \nabla^2 \mathfrak{A}\, dv = \int\limits_F (d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{A}. \tag{94}$$

Wir wollen jetzt noch zwei Ausdrücke von großer Wichtigkeit ableiten, die wir später öfters benutzen werden.

Wir setzen in den Gaußschen Satz (91) $\mathfrak{A} = q\nabla p$, wo p und q Skalare sind, dann wird auf Grund von (54)

$$\int\limits_F d\mathfrak{f}\cdot q\nabla p = \int\limits_V \operatorname{div}(q\nabla p) dv = \int\limits_V q \operatorname{div}\nabla p\cdot dv + \int\limits_V \nabla p\cdot\nabla q\cdot dv. \tag{95}$$

Weiter folgt aus (61) und (68):

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - \nabla\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} - \nabla\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} = -\mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} + \\ + [\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}].$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck beiderseits mit dv und integrieren über ein Volumen V mit der Oberfläche F, so erhalten wir aus (44) und (60) für die linke Seite

$$\int\limits_F d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} - \int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} = -\int\limits_F [\mathfrak{A}[\mathfrak{B} d\mathfrak{f}]] - \int\limits_F d\mathfrak{f}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}.$$

Und demnach

$$(96)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_F [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}d\mathfrak{f}]] + \int_F d\mathfrak{f}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} = \int_V \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}dv + \int_V \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}dv + \\ &\qquad + \int_V [\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\;\;\mathfrak{B}]\,dv + \int_V [\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}\;\;\mathfrak{A}]\,dv. \end{aligned} \right.$$

Kapitel IV.

Allgemeine Folgerungen.

15. Rotor und Divergenz des Radiusvektors r. Es sei M ein fester und P ein beweglicher Punkt (Fig. 14). Die Strecke MP, von M nach P zu gerichtet, nennt man den Radiusvektor und bezeichnet ihn gewöhnlich durch $\mathfrak{r}$. Der Anfangspunkt M von $\mathfrak{r}$ heißt Aufpunkt.

Fig. 14.

Bezeichnen wir den Einheitsvektor längs $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{r}_0$ und den Betrag von $\mathfrak{r}$ durch r, so ist

$$\text{(a)}\qquad \mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_0.$$

Setzen wir in (47) $p = r$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{r}_0$ und demzufolge $da = dr$, so erhalten wir

$$\text{(b)}\qquad \mathfrak{r}_0\nabla r = \frac{dr}{dr} = 1$$

und, da die größte Änderung von r in die Richtung von $\mathfrak{r}_0$ fällt, so ergibt uns (b) unmittelbar, daß

$$(97)\qquad \nabla r = \mathfrak{r}_0$$

ist. Hieraus folgt:

$$(98)\qquad \mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_0 = r\nabla r = \nabla\left(\frac{r^2}{2}\right)$$

und, da wegen (80) der Rotor eines Gradienten verschwindet:

$$(99)\qquad \mathrm{rot}\,\mathfrak{r} = 0$$

d. h. der Rotor des Radiusvektors verschwindet.

Wir wollen jetzt die Divergenz von $\mathfrak{r}$ bestimmen.

Als Volumen V nehmen wir einen konischen Zylinder (Fig. 15), dessen Mantelfläche durch den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ mit dem Aufpunkt M gebildet wird. Die Grundfläche $d\mathfrak{f}_1$ und Endfläche $d\mathfrak{f}_2$ sind Teile

von Kugelflächen, welche um M als Zentrum mit den Radien r und $r + dr$ geschlagen sind.

Bezeichnen wir durch do den räumlichen Winkel, unter welchem wir $d\mathfrak{f}_1$ und $d\mathfrak{f}_2$ von M aus sehen, so erhalten wir

$$df_1 = r^2 do$$

und
$$df_2 = do(r + dr)^2 = r^2 do + 2r\,do\,dr,$$

unter Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung. Setzen wir in (45) $\mathfrak{r}$ statt $\mathfrak{A}$, so ist für die Mantelfläche überall $d\mathfrak{f}\mathfrak{r} = 0$ und für die Grund- und Endfläche

$$d\mathfrak{f}_1\mathfrak{r} = -r^3 do,$$
$$d\mathfrak{f}_2\mathfrak{r}_1 = df_2(r + dr) = r^3 do + 3r^2 do\,dr$$

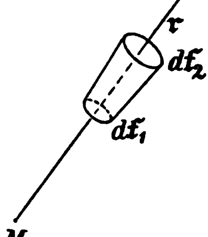


Fig. 15.

unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung. Die Summe beider Ausdrücke ergibt $3r^2 do\,dr$. Da aber das Volumen des Zylinders gleich $r^2 do\,dr$ ist, so erhalten wir aus (45)

$$\text{(100)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{r} = 3,$$

d. h. die Divergenz des Radiusvektors ist überall gleich 3.

16. Die Änderung eines Vektors in der nächsten Umgebung eines festen Punktes. Bevor wir zur Untersuchung dieser Änderung übergehen, wollen wir zwei allgemeine Beziehungen ableiten.

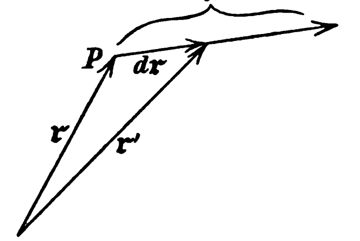


Fig. 16.

Wir ersetzen in (59) $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{r}$, wobei wir wieder den Aufpunkt durch M und den beweglichen Punkt durch P bezeichnen (Fig. 16), und erhalten

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{r} = |\mathfrak{A}| \cdot \frac{d\mathfrak{r}}{da}.$$

Es ist klar, daß im Punkte P die Richtung von $d\mathfrak{r}$ mit derjenigen von $\mathfrak{A}$ zusammenfällt und $d\mathfrak{r}$ dem Betrage nach gleich da sein wird.

Bezeichnen wir also den Einheitsvektor von $\mathfrak{A}$ im Punkte P durch $\mathfrak{A}_0$, so folgt $d\mathfrak{r} = \mathfrak{A}_0 da$ und

$$\text{(101)} \qquad (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{r} = |\mathfrak{A}|\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A},$$

wo also, wie gesagt, der Wert von $\mathfrak{A}$ für den Punkt P zu nehmen ist. Ein Vektor $\mathfrak{A}$ ist also gleich der A-fachen Zunahme des Radiusvektors $\mathfrak{r}$, wenn man in der Richtung von $\mathfrak{A}$ um die Längeneinheit fortschreitet.

Ersetzen wir jetzt in (59) $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$, so wird

$$(\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{A} = r(\mathfrak{r}_0\nabla)\mathfrak{A} = r\frac{d\mathfrak{A}}{dr},$$

woraus

$$(\mathfrak{r}_0\nabla)\mathfrak{A} = \frac{d\mathfrak{A}}{dr}. \tag{102}$$

Es ist also $\frac{d\mathfrak{A}}{dr}$ die Zunahme von $\mathfrak{A}$, berechnet auf die Längeneinheit, wenn man in der Richtung von $\mathfrak{r}_0$ fortschreitet. Dies kann aber auch vom Aufpunkt aus geschehen. D. h. der Ausdruck (102) ist auch für den Aufpunkt selbst gültig.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Änderung eines Vektors in der nächsten Umgebung eines festen Punktes, als welchen wir den Aufpunkt wählen.

In jedem Fall haben wir für die unmittelbare Nachbarschaft um den Aufpunkt herum, wegen (33)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + d\mathfrak{A}, \tag{a}$$

wo $\mathfrak{A}_1$ den Wert von $\mathfrak{A}$ für den Aufpunkt bedeutet.

Führen wir jetzt die Bezeichnung

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 dr = \mathfrak{r}_1 \tag{b}$$

ein, wo also $\mathfrak{r}_1$ einen Radiusvektor vom Aufpunkt aus bedeutet, und multiplizieren (102) links und rechts mit dr, so wird wegen (b)

$$dr(\mathfrak{r}_0\nabla)\mathfrak{A} = (\mathfrak{r}_1\nabla)\mathfrak{A} = d\mathfrak{A}, \tag{c}$$

woraus infolge von (a)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + (\mathfrak{r}_1\nabla)\mathfrak{A}. \tag{103}$$

Auf Grund von (68) haben wir

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{r}_1 + (\mathfrak{r}_1\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{r}_1] + [\mathfrak{r}_1\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]. \tag{d}$$

Da aber $\mathfrak{r}_1$ ein Radiusvektor ist, wird nach (99) $\mathrm{rot}\,\mathfrak{r}_1 = 0$, und wir können deshalb statt (d), unter Berücksichtigung von (101) und (c), schreiben

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1) = \mathfrak{A} + d\mathfrak{A} + [\mathfrak{r}_1\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}] = 2\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1 + [\mathfrak{r}_1\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}], \tag{e}$$

woraus

$$(104)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}_1}{2} + \tfrac{1}{2}\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1) + \tfrac{1}{2}[\operatorname{rot}\mathfrak{A}\ \mathfrak{r}_1].$$

Wir bezeichnen jetzt

$$(f)\qquad d_1\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}[\operatorname{rot}\mathfrak{A}\ \mathfrak{r}_1],\quad d_2\mathfrak{A} = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2} + \tfrac{1}{2}\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{r}_1).$$

Dann ist

$$(g)\qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + d_1\mathfrak{A} + d_2\mathfrak{A},\quad d\mathfrak{A} = d_1\mathfrak{A} + d_2\mathfrak{A}.$$

Wir bilden nun den Rotor von (104) und erhalten mit Rücksicht auf (80) und die Konstanz von $\mathfrak{A}_1$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}[\operatorname{rot}\mathfrak{A}\ \mathfrak{r}_1]$$

oder infolge von (63) und (81)

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{r}_1\nabla)\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{r}_1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{A}\cdot\operatorname{div}\mathfrak{r}_1.$$

Hieraus ergibt sich nach obigen Relationen:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}d(\operatorname{rot}\mathfrak{A}) - \frac{\operatorname{rot}\mathfrak{A}}{2} + \frac{3\operatorname{rot}\mathfrak{A}}{2}$$

oder

$$(h)\qquad d(\operatorname{rot}\mathfrak{A}) = 0$$

d. h. innerhalb des Bereiches, wo die Entwickelung (104) noch gültig ist, muß man rot $\mathfrak{A}$ als konstant annehmen und gleich dem Wert für den Aufpunkt.

Um diese Konstanz hervorzuheben, bezeichnen wir diesen Wert durch $\operatorname{rot}_0\mathfrak{A}$ und erhalten deshalb aus dem ersten Ausdruck in (f) infolge von (b)

$$(105)\qquad \frac{d_1\mathfrak{A}}{dr} = \tfrac{1}{2}[\operatorname{rot}_0\mathfrak{A}\ \mathfrak{r}_0] = \mathfrak{M}.$$

Aus (f), (g) und (c) folgt unmittelbar:

$$d_2\mathfrak{A} = d\mathfrak{A} - d_1\mathfrak{A} = d\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_1\operatorname{rot}_0\mathfrak{A}] = (\mathfrak{r}_1\nabla)\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_1\operatorname{rot}_0\mathfrak{A}],$$

und wir finden

$$(106)\qquad \frac{d_2\mathfrak{A}}{dr} = (\mathfrak{r}_0\nabla)\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_0\operatorname{rot}_0\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}.$$

Aus (g), (105) und (106) ergibt sich demnach

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + dr\{\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\}. \tag{104a}$$

Wir möchten hier noch einmal hervorheben, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{C}$ für eine bestimmte Richtung von $\mathfrak{r}_0$ konstant, also unabhängig von dr sind, innerhalb des Bereiches, wo die Entwickelung (104), resp. (104a) noch gültig ist, wie dies aus (102) und (h) folgt. Der Ausdruck (104) resp. (104a) selbst entspricht vollkommen den ersten Gliedern der Entwickelung einer skalaren Funktion nach der Taylorschen Reihe.

17. Darstellung eines Vektors als Summe eines Rotors und eines Gradienten. Wir wollen jetzt zeigen, daß ein Vektor $\mathfrak{B}$ innerhalb seines Feldes, wo er als endlich und stetig angenommen wird, dargestellt werden kann durch

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{N} + \mathfrak{C} = \nabla p + \operatorname{rot}\mathfrak{D}, \tag{a}$$

wo also

$$\mathfrak{N} = \nabla p, \quad \mathfrak{C} = \operatorname{rot}\mathfrak{D}$$

und folglich

$$\operatorname{rot}\mathfrak{B} = \operatorname{rot}^2\mathfrak{D}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = \operatorname{div}\nabla p = \nabla^2 p. \tag{b}$$

Um eine solche Zerlegung auszuführen und $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{C}$ zu bestimmen, machen wir in (96)

$$\mathfrak{A} = \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}_0}{r^2} \tag{107}$$

und legen den Aufpunkt innerhalb des Volumens V, wo $\mathfrak{B}$ endlich und stetig angenommen ist. Da $\mathfrak{A}$ für den Aufpunkt unendlich wird, schlagen wir um ihn eine Kugel mit dem Radius R. In dem Raum V_1 zwischen der Oberfläche F_1 der Kugel und der das Volumen V begrenzenden Oberfläche F ist überall wegen (80)

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{rot}\nabla\frac{1}{r} = 0 \tag{c}$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \operatorname{div}\nabla\frac{1}{r} = \nabla^2\frac{1}{r} = 0, \tag{108}$$

was in ähnlicher Weise wie Gleichung (100) hergeleitet werden kann.

Die Oberfläche von V_1 setzt sich zusammen aus zwei getrennten Flächen F_1 und F. Wir haben deshalb die linke Seite von (96)

auf diese beiden Oberflächen anzuwenden. Für die Oberfläche F_1 der Kugel erhalten wir unter Berücksichtigung, daß die äußere Normale zu V_1 auf F_1 gleich $\mathfrak{n} = -\mathfrak{r}_0$ ist, und aus (29)

$$
\text{(d)}\left\{\begin{aligned}
&\int\limits_{F_1}\left[\nabla\frac{1}{r}[\mathfrak{B}\,d\mathfrak{f}]\right]+\int\limits_{F_1} d\mathfrak{f}\,\mathfrak{B}\cdot\nabla\frac{1}{r}=\int\limits_{F_1}\frac{[\mathfrak{r}_0[\mathfrak{B}\mathfrak{r}_0]]}{R^2}df+\int\limits_{F_1}\frac{\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{r}_0}{R^2}df=\\
&=\int\limits_{F_1}\frac{\mathfrak{B}\,df}{R^2}-\int\limits_{F_1}\frac{\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{r}_0}{R^2}\,df+\int\limits_{F_1}\frac{\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{r}_0}{R^2}\,df=\frac{1}{R^2}\int\limits_{F_1}\mathfrak{B}\,df=\\
&=\int\mathfrak{B}\,do=\mathfrak{B}_m 4\pi,
\end{aligned}\right.
$$

wo do den räumlichen Winkel bedeutet, unter welchem man ein Element df der Kugeloberfläche vom Aufpunkt aus sieht. $\mathfrak{B}_m$ ist der Mittelwert der Werte von $\mathfrak{B}$ auf dieser Oberfläche. Bezeichnen wir den Wert von $\mathfrak{B}$ im Aufpunkt durch $\mathfrak{B}_1$, so können wir, wenn wir R unendlich klein werden lassen, $\mathfrak{B}_m$ durch $\mathfrak{B}_1$ und das Volumen V_1, zwischen F_1 und F', durch V ersetzen, und erhalten infolgedessen aus (96) auf Grund von (c), (108) und (d)

$$
(109)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_V\nabla\frac{1}{r}\cdot\operatorname{div}\mathfrak{B}\,dv-\frac{1}{4\pi}\int\limits_F\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathfrak{B}\,d\mathfrak{f}+\\
&+\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\left[\operatorname{rot}\mathfrak{B}\;\;\nabla\frac{1}{r}\right]dv-\frac{1}{4\pi}\int\limits_F\left[\nabla\frac{1}{r}[\mathfrak{B}\,d\mathfrak{f}]\right].
\end{aligned}\right.
$$

Da der Aufpunkt innerhalb V beliebig liegen kann, so können wir $\mathfrak{B}$ mittelst (109) für einen beliebigen Punkt innerhalb V berechnen, wenn die Werte von $\mathfrak{B}$ auf der Oberfläche F und diejenigen von div $\mathfrak{B}$ und rot $\mathfrak{B}$ innerhalb V bekannt sind.

Liegt der Aufpunkt außerhalb des Volumens V, so ist $\mathfrak{A} = \nabla\frac{1}{r}$ überall innerhalb V endlich. Es folgt alsdann unmittelbar aus (96) wegen der vorstehenden Beziehungen, daß die rechte Seite von (109) verschwindet, d. h. liegt der Aufpunkt außerhalb V, so ist anstatt $\mathfrak{B}_1$ in (109) Null zu setzen.

Um (109) weiter umzuformen, schicken wir folgende Bemerkung voraus: Wir haben in Nr. 15 den Aufpunkt fest und den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ beweglich angenommen und als positive Richtung von $\mathfrak{r}$

bzw. $\mathfrak{r}_0$ diejenige zum Endpunkte hin. Unter diesen Annahmen folgt die Gleichung (107). Denn verschieben wir den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ um eine kleine Strecke dr längs der positiven Richtung von $\mathfrak{r}$, so verkleinert sich $\frac{1}{r}$, da r wächst, und deshalb ist die stärkste Änderung von $\frac{1}{r}$ nach Richtung und Größe durch den Ausdruck (107) gegeben. Wir wollen jetzt das Umgekehrte annehmen, nämlich den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ festhalten und dafür den Aufpunkt um eine kleine Strecke dr verschieben, auch wieder längs $\mathfrak{r}$, dessen positive Richtung wir ungeändert lassen. Dann vergrößert sich $\frac{1}{r}$, da hierbei r kleiner wird, und wir erhalten für die stärkste Änderung von $\frac{1}{r}$ wieder den Ausdruck (107), aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

Führen wir deshalb den Operator ∇' ein, der auf eine Funktion von r angewandt, dasselbe leistet wie ∇, nur mit dem Unterschiede, daß nicht der Endpunkt von $\mathfrak{r}$, sondern der Aufpunkt als beweglich gedacht wird, und rechnen wir dabei die positive Richtung von $\mathfrak{r}_0$, wie immer, vom Aufpunkte aus, so können wir schreiben

$$(110) \qquad \nabla\frac{1}{r} = -\nabla'\frac{1}{r}.$$

Wir wollen jetzt diese Beziehung benutzen, um (109) umzuformen. Zu dem Zweck denken wir uns zunächst ein Feld des Skalars m gegeben. Wir wollen $\nabla\frac{m}{r}$ bestimmen, wobei m demjenigen Wert entspricht, welcher dem Endpunkt von $\mathfrak{r}$ zukommt. Hierbei müssen wir bedenken, daß sich der Endpunkt von $\mathfrak{r}$ bewegt, also auch m sich ändern muß; d. h. wir erhalten wegen (55)

$$(\mathrm{e}) \qquad \nabla\left(\frac{m}{r}\right) = \frac{1}{r}\nabla m + m\nabla\frac{1}{r}.$$

Wollen wir jetzt die Größe $\nabla'\left(\frac{m}{r}\right)$ bestimmen, so ist der Aufpunkt als beweglich zu denken, also ändert sich m nicht. Demnach ist

$$(\mathrm{f}) \qquad \nabla'\left(\frac{m}{r}\right) = m\nabla'\frac{1}{r} = -m\nabla\frac{1}{r}.$$

Da (109) aus (96) entstanden ist, indem $\mathfrak{A}$ durch $\nabla \frac{1}{r}$ ersetzt wurde, so bezieht sich in (109) der Operator ∇ nur auf $\frac{1}{r}$. Hiernach können wir auf Grund von (f) und (110) schreiben

$$\text{(g)} \qquad \nabla \frac{1}{r} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{B}\, dv = -dv \operatorname{div} \mathfrak{B} \cdot \nabla' \frac{1}{r} = -\nabla'\left(\frac{\operatorname{div} \mathfrak{B}\, dv}{r}\right)$$

und analog

$$\text{(h)} \qquad \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{B} d\mathfrak{f} = -\nabla'\left(\frac{\mathfrak{B} d\mathfrak{f}}{r}\right).$$

Denn sowohl div $\mathfrak{B} dv$ als $\mathfrak{B} d\mathfrak{f}$ beziehen sich auf den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ und werden deshalb durch den Operator ∇' nicht berührt.

Wir wollen endlich noch von der Gleichung (69) Gebrauch machen und dort p durch $\frac{1}{r}$ ersetzen, wobei $\mathfrak{A}$ dem Werte am Endpunkt von $\mathfrak{r}$ entspricht. Verstehen wir unter rot′ eine dem rot gleiche Operation, nur daß hierbei die Verschiebung des Aufpunktes angenommen, also $\mathfrak{A}$ in (69) als konstant anzusehen ist, so ergibt (69) und die Definition von ∇'

$$\text{(i)} \qquad \operatorname{rot}'\left(\frac{\mathfrak{A}}{r}\right) = -\left[\mathfrak{A}\, \nabla' \frac{1}{r}\right].$$

Wir können deshalb schreiben

$$\text{(k)} \qquad \left[\operatorname{rot} \mathfrak{B} \quad \nabla \frac{1}{r}\right] dv = -\left[\operatorname{rot} \mathfrak{B} \quad \nabla' \frac{1}{r}\right] dv = \operatorname{rot}'\left(\frac{\operatorname{rot} \mathfrak{B}\, dv}{r}\right)$$

$$\text{(l)} \qquad \left[\nabla \frac{1}{r} [\mathfrak{B} d\mathfrak{f}]\right] = \left[[\mathfrak{B} d\mathfrak{f}]\, \nabla' \frac{1}{r}\right] = -\operatorname{rot}'\left(\frac{[\mathfrak{B} d\mathfrak{f}]}{r}\right).$$

Setzen wir diese Ausdrücke (g), (h), (k) und (l) in (109) ein, so können wir ∇' und rot′ aus den Integralzeichen herausheben, weil sich diese Operationen ja nur auf den Aufpunkt beziehen. Schreiben wir ferner $\mathfrak{B}$, ∇ und rot an Stelle von $\mathfrak{B}_1$, ∇' und rot′, da es doch ohne weiteres ersichtlich ist, daß es hier auf den Aufpunkt, d. h. auf den Punkt, für welchen $\mathfrak{B}$ bestimmt werden soll, ankommt, so gewinnen wir

$$\text{(111)} \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{B} = &-\frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_V \frac{\operatorname{div} \mathfrak{B}}{r}\, dv + \frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_F \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}}{r}\, df + \\ &+ \frac{\operatorname{rot}}{4\pi}\int\limits_V \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{B}}{r}\, dv + \frac{\operatorname{rot}}{4\pi}\int\limits_F \frac{[\mathfrak{B}\mathfrak{n}]}{r}\, df. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir nunmehr

$$p = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\operatorname{div}\mathfrak{B}}{r}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}}{r}\,df \tag{112}$$

und

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\operatorname{rot}\mathfrak{B}}{r}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \frac{[\mathfrak{B}\mathfrak{n}]}{r}\,df, \tag{113}$$

so ist die gesuchte Zerlegung

$$\mathfrak{B} = \nabla p + \operatorname{rot}\mathfrak{D} \tag{114}$$

gefunden, d. h. es ist gezeigt, wie man jeden Vektor $\mathfrak{B}$ im Innern eines Feldes V aus den Werten von div $\mathfrak{B}$ und rot $\mathfrak{B}$ im Innern und aus den Oberflächenwerten von $\mathfrak{B}$ berechnen kann.

18. Anderer Beweis der vorhergehenden Zerlegung. Wir kehren zu dem Ausdruck (45) zurück und ersetzen dort $\mathfrak{A}$ durch $\nabla\frac{1}{r}$. Solange der Aufpunkt außerhalb von F liegt, ist gemäß (108): $\operatorname{div}\nabla\frac{1}{r} = 0$. Es fragt sich, was wir erhalten, falls wir den Aufpunkt innerhalb F legen und zur Grenze $V = 0$ übergehen, da hierbei $\nabla\frac{1}{r}$ doch unendlich groß wird. Nehmen wir für F die Oberfläche einer kleinen Kugel mit dem Radius R um den Aufpunkt. Dann haben wir nach (107):

$$\nabla\frac{1}{r}\cdot d\mathfrak{f} = -\frac{\mathfrak{r}_0\,d\mathfrak{f}}{R^2} = -\,do.$$

Deshalb folgt sofort aus (45)

$$\lim_{V=0} \operatorname{div}\nabla\frac{1}{r}\cdot V = -\,4\pi. \tag{115}$$

Wir wollen jetzt das Integral

$$\mathfrak{M} = \int\limits_V \frac{\mathfrak{B}}{r}\,dv \tag{116}$$

näher betrachten, wobei der Aufpunkt innerhalb V liegen soll.

Es ist leicht zu beweisen, daß $\mathfrak{M}$ bei Stetigkeit von $\mathfrak{B}$ innerhalb V ebenfalls stetig sein wird. Zu dem Zweck zerlegen wir V in zwei Teile. Der eine Teil bestehe aus einer kleinen Kugel

mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Aufpunkt. Dann ist $\mathfrak{M}$ im übrigen Teil von V stetig, und wir brauchen deshalb nur die Stetigkeit von $\mathfrak{M}$ innerhalb der Kugel zu beweisen. Bei genügender Kleinheit von R und wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{B}$ können wir letztere Größe innerhalb der Kugel als konstant und gleich $\mathfrak{B}_1$ ansehen. Wir erhalten dann

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{B}_1 \int\limits_{V_1} \frac{dv}{r} = \mathfrak{B}_1\, 2\pi R^2,$$

wo V_1 das Volumen der Kugel bedeutet. Bei $R = 0$ verschwindet $\mathfrak{M}_1$, womit die Stetigkeit bewiesen ist.

Wir können hiernach auf Grund von (i) Nr. **17** und (110) schreiben

$$\operatorname{rot} \mathfrak{M} = \int\limits_V \left[\nabla' \frac{1}{r}\ \ \mathfrak{B}\right] dv = -\int\limits_V \left[\nabla \frac{1}{r}\ \ \mathfrak{B}\right] dv.$$

Anderseits ist wegen (69)

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathfrak{B}}{r}\right) = \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{B}}{r} + \left[\nabla \frac{1}{r}\ \ \mathfrak{B}\right].$$

Berücksichtigen wir außerdem (93), so wird

$$\operatorname{rot} \mathfrak{M} = \int\limits_V \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{B}}{r}\, dv + \int\limits_F \frac{[\mathfrak{B}\,\mathfrak{n}]}{r}\, df. \tag{117}$$

Ganz analog erhalten wir für div $\mathfrak{M}$ aus (54)

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = \int\limits_V \mathfrak{B}\, \nabla' \frac{1}{r} dv = -\int\limits_V \mathfrak{B}\, \nabla \frac{1}{r} dv \tag{a}$$

und, da wegen (55)

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{B}}{r}\right) = \frac{\operatorname{div} \mathfrak{B}}{r} + \mathfrak{B} \nabla \frac{1}{r}$$

ist, so folgt mit Benutzung des Gaußschen Satzes

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = \int\limits_V \frac{\operatorname{div} \mathfrak{B}}{r}\, dv - \int\limits_F \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{n}}{r}\, df. \tag{118}$$

Wir wollen jetzt $\nabla^2 \mathfrak{M}$ bestimmen. Diese Operation bezieht sich, wie dies auch für rot $\mathfrak{M}$ und div $\mathfrak{M}$ bei der Ableitung von

(117) und (118) angenommen worden ist, auf diejenige Stelle innerhalb V, wo sich der Aufpunkt befindet. Deshalb war der Aufpunkt als beweglich angenommen und $\mathfrak{B}\,dv$ in (116) als konstant.

Infolgedessen erhalten wir aus (84) und (110)

$$\nabla^2 \mathfrak{M} = \int_V \mathfrak{B} \nabla'^2 \frac{1}{r}\, dv = \int_V \mathfrak{B} \nabla^2 \frac{1}{r}\, dv = \int_V \mathfrak{B} \operatorname{div} \nabla \frac{1}{r}\, dv.$$

Da aber $\operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} = 0$ ist im ganzen Raum außerhalb der um den Aufpunkt mit dem sehr kleinen Radius R geschlagenen Kugel, so folgt wegen (115), beim Grenzübergang zu $R = 0$:

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \mathfrak{M}. \tag{119}$$

Nun haben wir wegen (79a)

$$\nabla^2 \mathfrak{M} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{M} - \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}.$$

Demnach ergibt sich aus (117), (118) und (119), wenn wir die Bezeichnungen

$$p = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{M} \tag{120}$$

und

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathfrak{M} \tag{121}$$

einführen,

$$\mathfrak{B} = \nabla p + \operatorname{rot} \mathfrak{D}$$

d. h. (114). Man sieht, daß (120) und (121) mit (112) und (113) übereinstimmen. Aus (121) folgt unmittelbar im Hinblick auf (81)

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0. \tag{122}$$

19. Der Greensche Satz. Ganz analog wie wir durch (109) einen Vektor mit Hilfe gewisser Raum- bzw. Oberflächenintegrale dargestellt haben, wollen wir hier eine ähnliche Darstellung für einen Skalar innerhalb seines Feldes ableiten. Zu dem Zweck wenden wir uns zu dem Ausdruck (95) und erhalten

$$\int_V \nabla p \cdot \nabla q\, dv = \int_F q \cdot \nabla p \cdot d\mathfrak{f} - \int_V q \operatorname{div} \nabla p\, dv. \tag{a}$$

Da die linke Seite von (a) sich nicht ändert, falls wir p mit q vertauschen, so gilt das gleiche für die rechte Seite. Daraus folgt:

$$(123)\quad \int_F p\nabla q\,d\mathfrak{f} - \int_V p\,\mathrm{div}\,\nabla q\,dv = \int_F q\nabla p\,d\mathfrak{f} - \int_V q\,\mathrm{div}\,\nabla p\,dv.$$

Hier setzen wir $p = \frac{1}{r}$ und nehmen den Aufpunkt innerhalb F liegend an. Wir schlagen wieder um den Aufpunkt eine Kugel mit dem sehr kleinen Radius R und der Oberfläche F_1. Für den Raum zwischen F und F_1 ist dann (123) anwendbar, und auf Grund von (107) und (108) folgt aus (123)

$$(b)\quad \int_F \frac{\nabla q}{r}d\mathfrak{f} + \int_{F_1} \frac{\nabla q}{R}d\mathfrak{f} - \int_V \frac{\mathrm{div}\,\nabla q}{r}dv = -\int_F \frac{q_0\,\mathfrak{r}}{r^2}d\mathfrak{f} - \int_{F_1} \frac{q\,\mathfrak{r}_0}{R^2}d\mathfrak{f}.$$

Da aber $\frac{-\mathfrak{r}_0\,d\mathfrak{f}}{R^2} = do$ ist, so können wir beim Grenzübergang $R = 0$ das letzte Integral rechts in (b) durch $+ 4\pi q$ ersetzen, wobei hier der Wert von q für den Aufpunkt zu nehmen ist. Das zweite Integral links in (b) verschwindet bei dem Grenzübergang $R = 0$, da hier $\frac{d\mathfrak{f}}{R} = -\,do\,R\,\mathfrak{r}_0$ ist. Wir erhalten deshalb aus (b) bei $R = 0$:

$$(124)\quad q = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{div}\,\nabla q}{r}dv + \frac{1}{4\pi}\int_F \frac{\nabla q}{r}\cdot d\mathfrak{f} - \frac{1}{4\pi}\int_F q\nabla\frac{1}{r}d\mathfrak{f}$$

oder

$$(124\,a)\quad q = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{div}\,\nabla q}{r}dv + \frac{1}{4\pi}\int_F \frac{\mathfrak{n}\nabla q}{r}df - \frac{1}{4\pi}\int_F q\,\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df.$$

Wir nehmen jetzt (123) als unabhängig von (124) bestehend an, so daß p nicht mehr $= \frac{1}{r}$ ist, bringen alle Glieder in (123) auf die rechte Seite und addieren sie zu (124). Wir erhalten dann

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi q &= \int_V G\,\mathrm{div}\,\nabla q\,dv - \int_V q\,\mathrm{div}\,\nabla p\,dv + \\ &+ \int_F q\nabla G\,d\mathfrak{f} - \int_F \nabla q\cdot G\,d\mathfrak{f}, \end{aligned}\right.$$

wo

$$(d)\quad G = p - \frac{1}{r}.$$

Ist überall $\operatorname{div} \nabla p = 0$ innerhalb V und verschwindet G auf der Oberfläche F, so folgt aus (c)

$$4\pi q = \int_V G \operatorname{div} \nabla q \, dv + \int_F q \nabla G \, d\mathfrak{f}. \tag{125}$$

Dabei bedeutet G die sogenannte **Greensche Funktion** und die Gleichung (125) den **Greenschen Satz**, welcher lehrt, wie man den Skalar q innerhalb des Feldes V berechnen kann aus seinen Oberflächenwerten und aus den Werten von $\operatorname{div} \nabla q$ im Innern von V.

20. Das Potential. Wir haben in Nr. 12 gesehen, daß, wenn ein Vektor $\mathfrak{A}$ gleich dem Gradienten eines Skalars q ist, wenn also

$$\mathfrak{A} = \nabla q \tag{a}$$

ist, aus dem Stokesschen Satz (87) und aus (89) folgt:

$$\int_f \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A} \, df = \int_f \mathfrak{n} \operatorname{rot} \nabla q \, df = \int_L \mathfrak{A} \, d\mathfrak{l} = \int_L dq = 0, \tag{b}$$

falls q stetig und eindeutig ist. Denn im Falle der Eindeutigkeit von q müssen wir bei einem Umlauf um eine geschlossene Kurve wieder zum Anfangswert von q zurückgelangen.

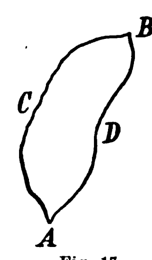


Fig. 17.

Diese Bedingungen seien für q innerhalb eines Raumes erfüllt. Dann wollen wir (b) auf eine geschlossene Kurve $ADBCA$ (Fig. 17) innerhalb dieses Raumes anwenden. Es ergibt sich:

$$\int_{ADB} \nabla q \, d\mathfrak{l} = \int_{ACB} \nabla q \, d\mathfrak{l}$$

d. h.

$$q_B - q_A = \text{konst.} = \int_A^B \nabla q \, d\mathfrak{l}, \tag{c}$$

da es unabhängig vom Integrationswege zwischen den Punkten A und B ist. Ist also z. B. q_A bekannt, so kann der Wert q_B für einen beliebigen Punkt B mit Hilfe von (c) bestimmt werden. Wegen der angenommenen Eindeutigkeit können wir die Kurve in Fig. 17 allmählich zu einem Punkte zusammenschrumpfen lassen. Mit Rücksicht auf (80) können wir dann sagen:

Ist $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$, so kann $\mathfrak{A}$ dargestellt werden in der Form

$$\mathfrak{A} = \nabla q. \tag{d}$$

In diesem Fall nennt man q das (skalare) Potential des Vektors $\mathfrak{A}$ und sagt, daß der Vektor $\mathfrak{A}$ von einem Potential ableitbar sei.

Da q durch (124) dargestellt werden kann, so folgt aus (d) und (124)

$$(126)\qquad \mathfrak{A} = -\frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_V \frac{\operatorname{div}\mathfrak{A}}{r}dv + \frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_F \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{n}}{r}df - \frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df.$$

Wir wollen den letzten Vektor der rechten Seite in (126) umformen.

Bezeichnen wir ihn durch $-\frac{\mathfrak{B}}{4\pi}$, so erhalten wir erstens

$$(e)\qquad \mathfrak{B} = \nabla\int\limits_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df = -\nabla\int\limits_F q\,do,$$

denn $\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df = -do$, wo do wieder den räumlichen Winkel bedeutet, unter welchem man vom Aufpunkt das Flächenelement df sieht.

Zweitens können wir, wie sogleich gezeigt werden soll, schreiben

$$(127)\qquad \mathfrak{B} = -\operatorname{rot}\int\limits_F \frac{[\nabla q\ \mathfrak{n}]}{r}df = -\operatorname{rot}\int\limits_F \frac{[\mathfrak{A}\mathfrak{n}]}{r}df.$$

Um diese Umformung zu beweisen, gehen wir aus von der Identität

$$(f)\qquad \left[\nabla\left(\frac{q}{r}\right)\ \mathfrak{n}\right] = \frac{1}{r}[\nabla q\ \mathfrak{n}] + q\left[\nabla\frac{1}{r}\ \mathfrak{n}\right]$$

und bilden

$$(g)\qquad \int\limits_F \left[\nabla\left(\frac{q}{r}\right)\ \mathfrak{n}\right]df = \int\limits_F \frac{1}{r}[\nabla q\ \mathfrak{n}]df + \int\limits_F q\left[\nabla\frac{1}{r}\ \mathfrak{n}\right]df.$$

Auf die linke Seite von (g) wollen wir (93) anwenden. Dies setzt voraus, daß $\nabla\left(\frac{q}{r}\right)$ innerhalb F endlich und stetig ist. Da aber für den Aufpunkt $\nabla\left(\frac{q}{r}\right)$ unendlich wird, schlagen wir um ihn eine Kugel mit dem Radius R und der Oberfläche F_1. Für

den Raum V zwischen F und F_1 ist dann der Gaußsche Satz anwendbar; es wird also, unter Berücksichtigung von (80):

$$\text{(h)} \quad \int_F \left[\nabla\left(\frac{q}{r}\right) \mathfrak{n}\right] df + \int_{F_1} \left[\nabla\left(\frac{q}{r}\right) \mathfrak{n}\right] df = -\int_V \operatorname{rot} \nabla\left(\frac{q}{r}\right) dv = 0.$$

Für das zweite Integral links können wir nach (g) schreiben

$$\int_{F_1} \left[\nabla\left(\frac{q}{r}\right) \mathfrak{n}\right] df = \int_{F_1} \frac{1}{R}[\nabla q \; \mathfrak{n}] df - \int_{F_1} \frac{q[\mathfrak{r}_0 \mathfrak{n}]}{R^2} df.$$

Hier verschwindet aber das erste Integral für $R = 0$, da $df = R^2 do$ ist, und das zweite, weil $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{n}$ entgegengesetzt gerichtet sind. Es wird deshalb auch das erste Integral links in (h) gleich Null. Zerlegen wir es gemäß (g), so erhalten wir demnach, in Analogie mit den Entwicklungen in Nr. **17**:

$$\text{(i)} \quad \int_F \frac{1}{r}[\nabla q \; \mathfrak{n}] df = -\int_F q\left[\nabla \frac{1}{r} \; \mathfrak{n}\right] df = \operatorname{rot} \int_F q \frac{\mathfrak{n}}{r} df.$$

Aus gleichen Gründen ist:

$$\text{(k)} \quad \operatorname{div} \int_F q \frac{\mathfrak{n}}{r} df = -\int_F q \mathfrak{n} \nabla \frac{1}{r} df$$

und wegen (84) und (108)

$$\text{(l)} \quad \nabla^2 \int_F q \frac{\mathfrak{n}}{r} df = 0.$$

Der Gradient von (k) ergibt, wie ein Vergleich mit (e) zeigt, den Wert $-\mathfrak{B}$. Nehmen wir deshalb den Rotor von (i), so erhalten wir infolge (l) und (79a) den Ausdruck (127), den wir ableiten wollten. Wir sehen also, daß $\mathfrak{B}$ sowohl durch den Rotor eines Vektors als auch durch den Gradienten eines Skalars dargestellt werden kann. Hieraus folgt unmittelbar

$$\text{(m)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{B} = 0.$$

Wir wollen hier noch einen Vektor $\mathfrak{C}$ anführen, welcher derselben Bedingung (m) genügt. Und zwar soll sein

$$(128) \quad \mathfrak{C} = \operatorname{rot} \int_L \frac{d\mathfrak{l}}{r}.$$

Aus (90) und (i) Nr. 17 folgt

$$\text{(n)} \qquad \int\limits_L \frac{d\mathfrak{l}}{r} = \int\limits_f \left[\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}\right] df = \text{rot}\int\limits_f \frac{d\mathfrak{f}}{r},$$

und daher

$$(129) \qquad \mathfrak{C} = \text{rot}\int\limits_L \frac{d\mathfrak{l}}{r} = -\nabla\int\limits_f \mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df$$

oder

$$(130) \qquad \mathfrak{C} = \nabla\int\limits_f do = \nabla\Omega.$$

Hier bedeutet Ω den räumlichen Winkel, unter welchem die ungeschlossene Fläche f mit der Randkurve L vom Aufpunkt aus gesehen wird. Das Vorzeichen von do bestimmt sich, je nachdem $\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0$ positiv oder negativ ist.

Falls F zu einer geschlossenen Fläche wird ($f = F$), so ist klar, daß $\Omega = 4\pi$ wird, wenn der Aufpunkt innerhalb F liegt, und $\Omega = 0$, wenn der Aufpunkt außerhalb F liegt, d. h. Ω macht einen Sprung um 4π beim Durchgang des Aufpunktes durch die geschlossene Fläche F. Der Vektor $\mathfrak{C}$ aber ist hierbei ständig Null und infolgedessen auch stetig.

Auf Grund von (127) können wir jetzt statt (126) schreiben

$$(131) \quad \mathfrak{A} = \nabla q = -\frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_V \frac{\text{div}\,\mathfrak{A}}{r}dv + \frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_F \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{n}}{r}df + \frac{\text{rot}}{4\pi}\int\limits_F \frac{[\mathfrak{A}\mathfrak{n}]}{r}df.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (111), so sehen wir, daß beide identisch werden, da doch rot $\mathfrak{A} = 0$ ist. Hieraus müssen wir folgern, daß wir das hier benutzte q nicht mit dem p (112) und (120) identifizieren dürfen. Dies ist eine sehr wichtige Bemerkung, die wir stets im Auge behalten müssen. Nur falls $\mathfrak{B}$ in (e) gleich Null wird, d. h. das letzte Glied in (131) verschwindet, ist, abgesehen von einer Konstante, $p = q$.

Bezeichnen wir zur Abkürzung div $\mathfrak{A}$ durch ϱ, so ersehen wir aus (131), dass das Potential q, mit dessen Hilfe der Vektor $\mathfrak{A}$ dargestellt werden kann, der Gleichung

$$(132) \qquad \varrho = \nabla^2 q$$

genügt. Diese Gleichung nennt man die Poissonsche Gleichung. Ist $\varrho = 0$, so geht diese Gleichung in die Laplacesche über.

Anderseits aber folgt aus (114):
rot $\mathfrak{B}$ = rot^2 $\mathfrak{D}$ oder im Hinblick auf (122) und (79a)

$$(133) \qquad \nabla^2 \mathfrak{D} = \mathfrak{C} = - \operatorname{rot} \mathfrak{B}.$$

Zerlegen wir jetzt $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ in ihre Komponenten in bezug auf ein rechtwinkliges geradliniges Koordinatensystem, so erhalten wir z. B. für die $\mathfrak{i}$-Komponente, infolge (84),

$$(133a) \qquad \nabla^2 D_1 = E_1.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Poissonsche Gleichung. Es genügen also die Komponenten von $\mathfrak{D}$, in bezug auf ein rechtwinkliges geradliniges Koordinatensystem, einzeln der Poissonschen Gleichung, wie ein skalares Potential. Es wird deshalb der Bestandteil $\mathfrak{D}$ des Vektors $\mathfrak{B}$ als Vektorpotential bezeichnet.

21. Partielle Differentiation. Ein Vektor oder ein Skalar kann, wie schon erwähnt, im allgemeinsten Fall von den Koordinaten und von der Zeit abhängen. Hierbei kann es vorkommen, daß die Koordinaten und die Zeit explizite und implizite im Vektor oder Skalar in Form von gewissen skalaren Parametern enthalten sind.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein solcher Vektor, der außer von den Koordinaten noch von einem Parameter a abhängt.

Gemäß (45) ist allgemein

$$(a) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{A} = \lim_{V=0} \frac{\int\limits_F \mathfrak{A} \mathfrak{n} \, df}{V}.$$

Bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}_1$ den Wert von $\mathfrak{A}$ für einen festen Punkt innerhalb V, so können wir $\mathfrak{A}$ für die Oberfläche F darstellen:

$$(b) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + d\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + d_a \mathfrak{A} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} da.$$

Hierbei bedeutet $d_a \mathfrak{A}$ die Änderung von $\mathfrak{A}$ bei konstantem a und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a}$ die partielle Derivierte von $\mathfrak{A}$ nach a. $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a}$ ist konstant und gleich dem Wert für den festen Punkt.

Aus (a) und (b) erhalten wir deshalb

$$(c) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\int\limits_F (\mathfrak{A}_1 + d_a \mathfrak{A}) \mathfrak{n} \, df}{V} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} \frac{\int\limits_F da \, \mathfrak{n} \, df}{V},$$

wobei der Grenzübergang zu $V = 0$ noch nicht ausgeführt zu denken ist.

Falls wir $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} \nabla a_1 = 0$ addieren, wo a_1 konstant ist und den Wert von a für den festen Punkt bedeutet, bekommen wir aus (c), da der Wert von a auf der Oberfläche F gleich $a_1 + da$ ist, nach dem entsprechenden Grenzübergang unter Berücksichtigung von (44),

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \operatorname{div}_a \mathfrak{A} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} \nabla a. \tag{134}$$

div_a bedeutet, daß a bei der Operation div als konstant angesehen werden muß.

Ganz analog finden wir aus (46)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{rot}_a \mathfrak{A} - \left[\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} \nabla a\right]. \tag{135}$$

Ebenfalls ergibt sich, wenn p einen Skalar bedeutet:

$$\nabla p = \nabla_a p + \frac{\partial p}{\partial a} \nabla a. \tag{136}$$

Setzen wir $p = \operatorname{div} \mathfrak{A}$, dann folgt hieraus wegen (134)

$$\nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} = \nabla_a \operatorname{div}_a \mathfrak{A} + \frac{\partial \operatorname{div}_a \mathfrak{A}}{\partial a} \nabla a + \nabla\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} \nabla a\right) \tag{137}$$

und aus (135)

$$\operatorname{rot}^2 \mathfrak{A} = \operatorname{rot}_a^2 \mathfrak{A} - \left[\frac{\partial \operatorname{rot}_a \mathfrak{A}}{\partial a} \nabla a\right] - \operatorname{rot}\left[\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a} \nabla a\right]. \tag{138}$$

22. Einführung der Abhängigkeit von der Zeit. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Vektor, der außer von den Koordinaten noch von der Zeit t abhängt Aus diesem Vektor bilden wir einen neuen, indem wir t in $\mathfrak{B}$ durch $a = t + br$ ersetzen. Diesen neuen Vektor bezeichnen wir durch $\mathfrak{B}'$.

Es bedeutet r in $a = t + br$ die Entfernung des Aufpunktes bis zu einem Volumenelement innerhalb der Fläche F oder bis zu einem Flächenelement von F; b ist der Dimension nach gleich einer reziproken Geschwindigkeit. Der Aufpunkt soll sich innerhalb F befinden.

Den Einheitsvektor längs r, vom Aufpunkt aus gerechnet, bezeichnen wir, wie gewöhnlich, durch $\mathfrak{r}_0$. Außerdem nehmen wir an, daß b innerhalb F konstant ist.

Wir erhalten deshalb aus (134) und (97)

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B}' = \underset{t+br}{\operatorname{div} \mathfrak{B}} + b\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right)\mathfrak{r}_0{}_{t+br}$$

und aus (135)

$$\text{(b)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{B}' = \underset{t+br}{\operatorname{rot} \mathfrak{B}} - b\left[\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\mathfrak{r}_0{}_{t+br}\right].$$

Denn es ist augenscheinlich einerlei, ob wir direkt $\operatorname{div}_a \mathfrak{B}'$ bestimmen, oder zuerst $\operatorname{div} \mathfrak{B}$ und nachträglich t durch $t + br$ ersetzen. Um dies letztere anzudeuten, ist $t + br$ unter die entsprechenden Glieder in (a) und (b) gesetzt.

Demnach ist also auch

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right)_{t+br}.$$

Aus (136) und (110) fließt weiter:

$$\text{(d)} \quad \nabla \int_V \frac{\operatorname{div} \mathfrak{B}}{r}{}_{t+br} dv = -\int_V \nabla \frac{1}{r} \cdot \underset{t+br}{\operatorname{div} \mathfrak{B}}\, dv - b \int_V \frac{\mathfrak{r}_0}{r} \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{B}}{\partial t}{}_{t+br} dv.$$

Ersetzen wir jetzt in (109) $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{B}'$, so gewinnen wir, unter Berücksichtigung, daß für den Aufpunkt, also für $r = 0$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$$

ist, aus (a) und (d)

$$\text{(e)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} = & -\frac{\nabla}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathfrak{B}}{r}{}_{t+br} dv - \frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{n}\mathfrak{B}' \cdot \nabla \frac{1}{r} df - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_F \left[\nabla \frac{1}{r} [\mathfrak{B}'\mathfrak{n}]\right] df + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\operatorname{rot} \mathfrak{B}' \ \nabla \frac{1}{r}\right] dv + \\ & + \frac{b}{4\pi} \int_V \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \mathfrak{r}_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} dv - \frac{b}{4\pi} \int_V \frac{\mathfrak{r}_0}{r} \operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}{}_{t+br} dv. \end{aligned} \right.$$

Aus (138) auf Grund von (63), (134) und (135) folgt

$$
(f)\quad \begin{cases}
\dfrac{\operatorname{rot}^2 \mathfrak{B}'}{r} = \dfrac{\operatorname{rot}^2 \mathfrak{B}}{r}_{t+br} - \dfrac{b}{r}\left[\operatorname{rot} \dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}_{t+br} \mathfrak{r}_0\right] - \dfrac{b}{r} \operatorname{rot}\left[\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \mathfrak{r}_0\right] = \\
= \dfrac{\operatorname{rot}^2 \mathfrak{B}}{r}_{t+br} + \dfrac{b}{r}\left[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}_{t+br}\right] - b\left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\nabla\right)\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} + \\
+ \dfrac{b}{r}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t}\nabla\right)\mathfrak{r}_0 - \dfrac{b}{r}\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{r}_0 + \dfrac{b\mathfrak{r}_0}{r} \operatorname{div} \dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}_{t+br} + \\
+ \dfrac{b^2 \mathfrak{r}_0}{r} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathfrak{B}'}{\partial t^2} \mathfrak{r}_0.
\end{cases}
$$

Anderseits haben wir aus (60) und (61)

$$
(g)\quad \begin{cases}
\displaystyle\int_F \dfrac{1}{r}\left[\mathfrak{r}_0\left[\mathfrak{n}\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t}\right]\right] df = \int_F d\mathfrak{f} \cdot \dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} - \int_F \dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \cdot \dfrac{d\mathfrak{f}\mathfrak{r}_0}{r} = \\
\displaystyle = \int_V \nabla\left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t}\right) dv - \int_V \left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\nabla\right)\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} - \int_V \dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\right) dv.
\end{cases}
$$

Da nun laut (102)

$$
(h)\quad \begin{cases}
\left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\nabla\right)\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t}}{dr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}}{dr}_{t+br} + \dfrac{b}{r}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} = \\
= \left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\nabla\right)\dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}_{t+br} + \dfrac{b}{r}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2}
\end{cases}
$$

ist, so ergibt sich im Hinblick auf (136), (68) und (97) statt (g):

$$
(i)\quad \begin{cases}
\displaystyle\int_F \dfrac{1}{r}\left[\mathfrak{r}_0\left[\mathfrak{n}\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{dt}\right]\right] df = \int_V \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t}\mathfrak{r}_0 dv - b\int_V \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{B}'}{\partial t^2} dv + \\
\displaystyle + \int_V \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t}\nabla\right)\mathfrak{r}_0 dv + \int_V \dfrac{1}{r}\left[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}_{t+br}\right] dv + \\
\displaystyle + b\int_V \dfrac{\mathfrak{r}_0}{r} \cdot \dfrac{\partial^2 \mathfrak{B}'}{\partial t^2}\mathfrak{r}_0 dv - \int_V \dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \operatorname{div}\left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\right) dv.
\end{cases}
$$

Außerdem ist wegen (60) und (61)

$$
(k)\quad \int_F \dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \cdot \dfrac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0}{r} df = \int_V \left(\dfrac{\mathfrak{r}^0}{r}\nabla\right)\dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} dv + \int_V \dfrac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} \operatorname{div}\left(\dfrac{\mathfrak{r}_0}{r}\right) dv
$$

und wegen (93) und (138)

$$(l)\left\{\begin{aligned}\int_F\left[df\frac{\operatorname{rot}\mathfrak{B}'}{r}\right] &= \int_F\frac{1}{r}[\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{B}']df - \int_F\frac{b}{r}\left[\mathfrak{n}\left[\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t}\mathfrak{r}_0\right]\right]df = \\ &= \int_V\frac{\operatorname{rot}^2\mathfrak{B}'}{r}dv - \int_V\left[\operatorname{rot}\mathfrak{B}'\nabla\frac{1}{r}\right]dv.\end{aligned}\right.$$

Nun ist $\left[\mathfrak{n}\left[\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t}\mathfrak{r}_0\right]\right] = \frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t}\cdot\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t}\mathfrak{n}$

und hieraus folgt mit Hilfe von (k) aus (l)

$$(m)\left\{\begin{aligned}\int_V\left[\operatorname{rot}\mathfrak{B}',\nabla\frac{1}{r}\right]dv &= -\int_F\frac{[\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{B}]}{r}_{t+br}df + \int_V\left(\frac{\mathfrak{r}_0}{r}\nabla\right)\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t}dv + \\ &+ \int_V\frac{\partial\mathfrak{B}'}{dt}\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{r}_0}{r}\right)dv - b\int_F\frac{\mathfrak{r}_0}{r}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t}\mathfrak{n}\,df + \int_V\frac{\operatorname{rot}^2\mathfrak{B}'}{r}dv.\end{aligned}\right.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (e) ein und berücksichtigen (f) und (i), so liefert die leicht abzuleitende Beziehung

$$(n)\qquad 2\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{r}_0}{r}\right) = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{r}_0}{r}$$

(denn es fließt aus (53), (107) und (100)

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{r}_0}{r}\right) = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{r}_0}{r} + \mathfrak{r}_0\nabla\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{r}_0}{r} - \frac{1}{r^2}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{r}_0 = \operatorname{div}\left(\frac{r\mathfrak{r}_0}{r}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right) = \frac{3}{r} + \mathfrak{r}\nabla\frac{1}{r} = \frac{2}{r}\Big):$$

$$(139)\left\{\begin{aligned}\mathfrak{B} &= \frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\operatorname{rot}^2\mathfrak{B} + b^2\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial t^2}}{r}_{t+br}dv - \frac{\nabla}{4\pi}\int_V\frac{\operatorname{div}\mathfrak{B}}{r}_{t+br}dv + \\ &+ \frac{b}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_F\frac{[\mathfrak{r}_0[\mathfrak{n}\mathfrak{B}]]}{r}_{t+br}df - \frac{1}{4\pi}\int_F\mathfrak{B}\mathfrak{n}_{t+br}\cdot\nabla\frac{1}{r}df + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_F\left[\nabla\frac{1}{r}[\mathfrak{n}\mathfrak{B}]_{t+br}\right]df - \frac{b}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_F\frac{\mathfrak{r}_0}{r}\cdot\mathfrak{n}\mathfrak{B}_{t+br}df - \frac{1}{4\pi}\int_F\frac{[\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{B}]}{r}_{t+br}df,\end{aligned}\right.$$

wofür sich auch schreiben läßt:

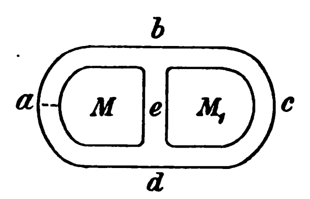
$$(140)\begin{cases} \mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\left[\operatorname{rot}^2\mathfrak{B} + b^2\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{dt^2}\right]_{t+br}}{r}\,dv - \frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\operatorname{div}\mathfrak{B}]_{t+br}}{r}\,dv + \\ + \frac{\nabla}{4\pi}\int\limits_F \frac{[\mathfrak{B}\mathfrak{n}]_{t+br}}{r}\,df + \frac{\operatorname{rot}}{4\pi}\int\limits_F \frac{[[\mathfrak{B}\mathfrak{n}]]_{t+br}}{r}\,df - \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \frac{[[\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{B}]]_{t+br}}{r}\,df. \end{cases}$$

Ist $b = 0$, so muß (140) in (111) übergehen, wovon man sich auf Grund (117) überzeugen kann.

Kapitel V.

Allgemeine Bemerkungen.

23. Mehrfach zusammenhängende Räume. Wir wollen jetzt einen Vektor $\mathfrak{A}$ untersuchen innerhalb eines Raumes V, welcher einerseits durch eine unendlich große Kugeloberfläche und anderseits durch einen ringförmigen Körper $abcd$, mit einem Querbalken e, (Fig. 18) begrenzt ist. Innerhalb V soll überall $\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$ sein. Dann ist nach den Entwicklungen in Nr. **20**



(a) $\qquad \mathfrak{A} = \nabla q.$

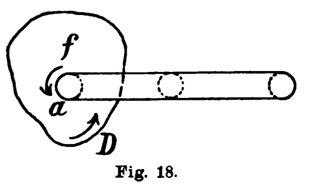


Fig. 18.

In Fig. 18 sei D eine geschlossene Kurve, die den Teil bad des Körpers umschlingt. Zugleich soll D die Randkurve einer Fläche f sein, welche den Körper in einer geschlossenen Kurve a schneiden mag. Der zwischen den Kurven D und a liegende Teil der Fläche f heiße f_1 (in Fig. 19 noch einmal gezeichnet).

Wir denken uns, für einen Augenblick, f_1 (Fig. 19) längs AB zerschnitten und wenden auf die so zerschnittene Fläche f_1 den Stokesschen Satz (87) an. Es folgt dann, da $\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$ ist,

$$\int\limits_L \mathfrak{A}\,d\mathfrak{l} = 0,$$

wo L die Randkurve der zerschnittenen Fläche f_1 bedeutet. Aus Fig. 19 ersieht man, daß sich L aus a, D und der zweimaligen Länge von AB zusammensetzt. Ist die Umlaufsrichtung längs L einmal festgelegt, so ergibt sich aus Fig. 19, daß AB, bei der Integration zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird. Deshalb verschwinden die diesbezüglichen Teile des obigen Integrals, und wir erhalten statt dessen

Fig. 19.

(b) $$\int_a \mathfrak{X} d\mathfrak{l} + \int_D \mathfrak{X} d\mathfrak{l} = 0$$

oder, falls wir die Umlaufsrichtung im ersten Integral umkehren, (Fig. 18)

(c) $$\int_D \mathfrak{X} d\mathfrak{l} = \int_a \mathfrak{X} d\mathfrak{l}.$$

Wir denken uns die Fläche f dehnbar und bewegen die Kurve a längs dem Teil bad des Körpers. Hierbei ändert sich die linke Seite von (c) nicht, und infolgedessen bleibt auch die rechte Seite unverändert, d. h.

(d) $$\int_a \mathfrak{X} d\mathfrak{l} = \text{konst.}$$

längs dem Teil bad des Körpers.

Wir dehnen jetzt f, bei unbeweglichem D, so weit aus, daß der Körper in e und c zugleich durch f geschnitten wird. Es nimmt dann f die Form eines Sackes an, dessen Öffnung durch D begrenzt wird. Auch jetzt ändert sich die linke Seite von (c) nicht, und wir erhalten ganz analog wie (c) unter Einhaltung des richtigen Umlaufssinnes

(e) $$\int_D \mathfrak{X} d\mathfrak{l} = \int_e \mathfrak{X} d\mathfrak{l} + \int_c \mathfrak{X} d\mathfrak{l} = \int_a \mathfrak{X} d\mathfrak{l} = \text{konst.}$$

Hierbei ist das Integral $\int_e \mathfrak{X} d\mathfrak{l} =$ konst. längs dem Teil bed des Körpers und $\int_c \mathfrak{X} d\mathfrak{l} =$ konst längs dem Teil bcd.

Lassen wir die Kurve D sich allmählich zusammenziehen, so wird diese in einem gewissen Moment auf der Oberfläche des Körpers

zu liegen kommen, und falls sie zu einem Punkt zusammenschrumpft, unbedingt den Körper durchschneiden. Die Oberfläche des betrachteten Körpers bildet aber einen Teil der Grenze des Raumes V. Wir sagen deshalb: Werden in einem Raumgebiet beim Zusammenziehen einer geschlossenen Kurve zu einem Punkt die Grenzen dieses Raumes durchschnitten, so wird der betreffende Raum ein mehrfach zusammenhängender genannt. Anderseits nennt man eine geschlossene Kurve, welche zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne die Grenzen des betreffenden Raumes zu zerschneiden, eine „reduzierbare". Zwei Kurven, die auf zwei verschiedenen Wegen zwei Punkte im Raum verbinden und ineinander überführbar sind, ohne die Grenzen des Raumes zu überschreiten, bilden zusammen eine reduzierbare geschlossene Kurve.

Wir schließen hieraus, daß der Ausdruck (b) Nr. **20**, resp. (89) nur so lange gültig ist, wie L als eine reduzierbare Kurve angesehen werden kann. Um eine solche reduzierbare Kurve zu erhalten, haben wir oben die Fläche f_1 (Fig. 19) längs AB zerschnitten. Auch die Kurve in Fig. 17 ist eine reduzierbare.

Ist L keine reduzierbare Kurve, so braucht im allgemeinen das Integral nicht Null zu sein, wie wir dies eben gesehen haben. Es kann aber der Fall eintreten, daß längs den Grenzen eines mehrfach zusammenhängenden Raumes die tangentiale Komponente von $\mathfrak{A}$ überall verschwindet. In diesem Fall ist die rechte Seite von (c) gleich Null; d. h. in einem solchen Raum kann jede geschlossene Kurve als eine reduzierbare angesehen werden.

Wir stellen uns jetzt vor, die Öffnungen M und M_1 des betrachteten Körpers in Fig. 18 seien durch Membrane geschlossen, und setzen fest, daß diese Membrane bei der Bildung eines Linienintegrals längs einer geschlossenen Kurve nicht durchsetzt werden dürfen. Daraus erhellt sofort, daß wir durch diese Membrane unseren Raum in einen einfach zusammenhängenden verwandelt haben, d. h. in einen solchen, wo jede geschlossene Kurve eine reduzierbare ist. Hieraus erklärt sich auch, was man unter einem n-fach zusammenhängenden Raum versteht. Ein solcher Raum wird dadurch gekennzeichnet, daß wir zum mindesten $n - 1$ Membrane ziehen müssen, um ihn in einen einfach zusammenhängenden zu verwandeln.

Demnach wäre der äußere in Fig. 18 dargestellte Raum ein dreifach zusammenhängender und ein ebensolcher der innere Raum des Körpers. Als bekanntes Beispiel eines zweifach zusammenhängenden Raumes sei der äußere, resp. innere Raum eines Ringes erwähnt.

24. Mehrdeutige Funktionen. Wir wollen jetzt die Konstante in (d) Nr. **23** durch $4\pi J$ bezeichnen und erhalten dann aus (d) und (e) Nr. **23**

$$\int_D \mathfrak{A}\, d\mathfrak{l} = 4\pi J. \tag{a}$$

Dies gilt für eine beliebige geschlossene Kurve, die den Teil bad des Körpers in Fig. 18 umschließt. Nehmen wir jetzt ein Linienintegral längs einer geschlossenen Kurve, welche um den Teil bad m-mal herumgeht, so erhalten wir statt (a) den m-fachen Wert, d. h.

$$\int_{mD} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{l} = 4\pi m J. \tag{b}$$

Da aber aus $\text{rot}\,\mathfrak{A} = 0$ folgt: $\mathfrak{A} = \nabla q$, so ergibt sich aus (b)

$$q_2 - q_1 = 4\pi m J \tag{c}$$

d. h. in einem mehrfach zusammenhängenden Raum kann das Potential eine mehrdeutige Funktion sein. Durch diese Mehrdeutigkeit werden die Ausdrücke (a) Nr. **19**, (123) und (124) unbestimmt. Diese Unbestimmtheit liegt in der Zahl m. Setzen wir jetzt ein für allemal fest, daß wir nicht mehr als einmal bad umlaufen dürfen d. h. $m = 1$, so fällt diese Unbestimmtheit fort. Diese Bestimmung kommt darauf hinaus, daß wir die in Nr. **23** eingeführten Membrane bei der Integration nicht durchsetzen dürfen, falls wir annehmen, daß der Anfangs- und Endpunkt des Intregrationsweges längs D auf der Membrane liegt. Es fragt sich jetzt, wie sich die entsprechenden Ausdrücke in Nr. **19** ändern werden, bei der Einführung dieser Membrane? Wir wollen uns auf das Beispiel eines zweifach zusammenhängenden Raumes beschränken und zwar auf den inneren Raum eines zu einem Ringe zusammengebogenen Rohres. Die Verallgemeinerung auf einen n-fach zusammenhängenden Raum ist dann leicht zu bewerkstelligen.

In unserem Beispiel wird die entsprechende Membrane durch einen beliebigen Schnitt quer durch den Ring dargestellt. Nehmen wir jetzt das Linienintegral längs einer Kurve von einer Seite der

Membrane aus, längs dem inneren Raum des Ringes, bis zur anderen Seite der Membrane, so gewinnen wir laut (a)

$$q_2 - q_1 = \int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{l} = \varkappa = 4\pi J. \tag{d}$$

Und hierbei ist $\varkappa$ eine konstante Größe längs der ganzen Membrane. Denn aus dem Vorhergehenden sehen wir, daß $4\pi J = \varkappa$ konstant ist für beliebige nicht reduzierbare Kurven, die ein und denselben Teil der Oberfläche des begrenzenden Raumes umkreisen. Wir können aber einen beliebigen Punkt der Kurve als Anfangs- resp. Endpunkte des Integrationsweges betrachten. Hierbei wird $\varkappa$ für alle Punkte konstant sein. Für eine andere Kurve erhalten wir, wieder für einen beliebigen Punkt, dasselbe $\varkappa$. Da aber bei unserem Beispiel alle Anfangs- resp. Endpunkte beliebiger Kurven, die den Ring innerhalb umkreisen, auf den entsprechenden Seiten der Membrane liegen, so muß, wie gesagt, $\varkappa$ längs der Membrane konstant sein. Aus (d) folgt dann, daß $\varkappa$ nichts anderes bedeutet als den Sprung von q beim Durchgang durch die Membrane.

Wir können deshalb die oben gestellte Frage, wie sich die Ausdrücke in Nr. **19**, bei der Einführung der Membrane, ändern werden, in dem Sinne beantworten, daß wir die Oberflächen der Membrane zu der das Volumen V begrenzenden Oberfläche mitrechnen.

Bevor wir weitergehen, wollen wir ein für allemal festsetzen, daß der Vektor $\mathfrak{A}$ eindeutig ist. Denn wir wollen uns unter $\mathfrak{A}$ stets einen Repräsentanten einer physikalischen Größe z. B. Kraft, Geschwindigkeit usw. vorstellen, und von einem solchen Vektor können wir keine Mehrdeutigkeit voraussetzen.

Dasselbe gelte auch für einen Skalar, der eine physikalische Größe darstellt, z. B. Temperatur, Dichte usw.

Hieraus ist es nach dem Vorhergehenden leicht, die entsprechenden Formeln in Nr. **19** und **20** für unser Beispiel eines 2-fach zusammenhängenden Raumes umzugestalten.

Wir fangen mit (a) Nr. **19** an, wobei wir zugleich $p = q$ setzen. Hierbei müssen wir $F + 2f$ statt F schreiben, wo f die eine Seite der Membrane bedeutet. Wir erhalten dann

$$\int_V \nabla q \cdot \nabla q\, dv = \int_F q\,\mathfrak{n}\nabla q\, df + \varkappa \int_f \mathfrak{n}\nabla q\, df - \int_V q \operatorname{div} \nabla q\, dv, \tag{141}$$

wobei die positive Normale zu f mit der Richtung des positiven Sprunges von q zusammenfällt.

In Fig. 20 ist ein Teil des Ringes gezeichnet; es bedeutet MM' den Schnitt der Membrane durch die Zeichenebene. Die Richtung des Integrationsweges ist durch den Pfeil angedeutet.

Fig. 20.

Wir wenden uns jetzt zur Gleichung (124). Hier verändert sich wegen der Eindeutigkeit von $\nabla q = \mathfrak{A}$ nur das dritte Glied. Wenn wir dieses mit q' bezeichnen, so ist:

$$(142)\quad 4\pi q' = -\int_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df - \varkappa\int_f \mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df$$
$$= -\int_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r} + \varkappa\int_f do.$$

Hieraus folgt wegen der Beziehung $\nabla q = \mathfrak{A}$, daß sich das dritte Glied auch in (126) ändern wird.

Bezeichnen wir dieses durch $4\pi\mathfrak{A}'$, so finden wir

$$(143)\qquad 4\pi\mathfrak{A}' = -\nabla\int_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df - \varkappa\nabla\int_f \mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df$$

oder wegen (129):

$$(143\text{a})\qquad 4\pi\mathfrak{A}' = -\nabla\int_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df + \varkappa\,\mathrm{rot}\int_L \frac{d\mathfrak{l}}{r},$$

wo L die Randkurve der Membrane, d. h. die Schnittkurve der Membrane mit der Oberfläche F bedeutet.

Verfolgen wir jetzt die Ableitung des Ausdruckes (127), so zeigt sich, daß wir auch die Oberfläche der Membrane berücksichtigen müssen, und erhalten statt (127):

$$(144)\quad \begin{aligned} -\mathrm{rot}\int_F \frac{[\mathfrak{A}\mathfrak{n}]}{r}df &= \nabla\int_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df + \varkappa\nabla\int_f \mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df = \\ &= \nabla\int_F q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r}df - \varkappa\,\mathrm{rot}\int_L \frac{d\mathfrak{l}}{r}. \end{aligned}$$

Hieraus und aus (143) ersehen wir, daß die Form der Darstellung in (131) unabhängig ist von der Art des Raumes.

Man sieht also unmittelbar, daß die Mehrdeutigkeit von q nur von q' abhängt, und daß p und $\mathfrak{D}$ in Nr. 17 stets eindeutig sein werden.

Ist die tangentiale Komponente von $\mathfrak{A}$ auf F überall gleich Null, so muß q längs F konstant und gleich q_1 sein. Dann ist aber auch $\varkappa = 0$, und es folgt aus (144)

$$q_1 \nabla \int_F \mathfrak{n} \nabla \frac{1}{r} df = 0. \tag{e}$$

Dies ergibt sich auch unmittelbar aus den an (130) anknüpfenden Erörterungen. Da aber $\varkappa = 0$ ist, ist auch keine Mehrdeutigkeit vorhanden. Dies deckt sich mit dem in Nr. **23** für den Fall des Verschwindens der tangentialen Komponenten von $\mathfrak{A}$ Gesagten.

Auf Grund von Nr. **23** und **24** können wir jetzt auch den Gültigkeitsbereich von (80) resp. (a) Nr. **13** näher untersuchen. Wie ersichtlich, ist (a) Nr. **13** eine Folge von (89), unter der Voraussetzung, daß in (89) L eine reduzierbare Kurve ist, damit bei einem Umlauf längs derselben p denselben Wert annimmt. Eine solche Kurve kann zu einem Punkt zusammengezogen werden, woraus dann (a) Nr. **13** folgt. Da aber, wie wir gesehen haben, eine reduzierbare Kurve auch in einem mehrfach zusammenhängenden Raume gezogen werden kann, so ist klar, daß (80), resp. (a) Nr. **13** stets gültig ist, unabhängig davon ob p ein- oder mehrdeutig ist.

25. Unstetigkeiten. Die bisher vorgenommenen Transformationen beruhen auf der Annahme, daß alle Größen, Vektoren wie Skalare, innerhalb des Raumes V stetig sind. Wir wollen jetzt das Vorkommen von Unstetigkeiten näher untersuchen.

So wissen wir, daß $\nabla \frac{1}{r}$ im Aufpunkt unstetig wird. Auch die Funktion $\int_F \mathfrak{n} \nabla \frac{1}{r} df = -\Omega$ macht einen Sprung von 4π beim Durchgang des Aufpunktes durch die Oberfläche F. Im allgemeinen können Flächen, Linien und Punkte vorkommen, wo die betreffenden Größen unstetig sind.

Um auf ein Volumen oder auf eine Fläche, innerhalb welcher solche Unstetigkeiten vorkommen, den Gaußschen Satz, den Stokesschen Satz oder andere vektoranalytische Transformationen anwenden zu können, verfahren wir folgendermaßen.

Ganz analog, wie wir bei der Untersuchung von $\nabla \frac{1}{r}$ um den Aufpunkt eine kleine Kugel geschlagen haben, werden wir auch im allgemeinen Fall die Unstetigkeitsflächen, -linien und -punkte durch entsprechende Flächen, Röhren und Kugeln vom übrigen

Raum ausschalten und diese letzteren zu den Begrenzungen des Raumes mitrechnen. Nachträglich werden wir diese Flächen sich unendlich nahe an die Unstetigkeitsflächen anschmiegen lassen und die Durchmesser der Röhren, resp. der Kugeln unendlich klein machen. Dies vorausgesetzt können wir einfach sagen, daß die vorkommenden Unstetigkeitsflächen, -linien und -punkte als zu den Begrenzungen des Raumes gehörend anzusehen sind.

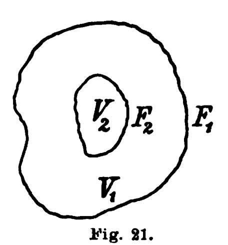


Fig. 21.

Es sei z. B. F_1 die Fläche, auf welche wir den Gaußschen Satz anwenden wollen (Fig. 21). Innerhalb dieser Fläche liege eine Unstetigkeitsfläche F_2, die den inneren Raum V in zwei Teile V_1 und V_2 teilt. Falls wir, wie immer, die äußere Normale zu F_1 als positiv annehmen, erhalten wir aus dem Gaußschen Satz für das Volumen V_1:

$$\int_{V_1} \operatorname{div} \mathfrak{A}_1 \, dv = \int_{F_1} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{n} \, df + \int_{F_2} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{n} \, df$$

und für das Volumen V_2:

$$\int_{V_2} \operatorname{div} \mathfrak{A}_2 \, dv = \int_{F_2} \mathfrak{A}_2 \mathfrak{n} \, df.$$

Rechnen wir, wie auch stets im folgenden geschehen soll, die positive Normale auf der Unstetigkeitsfläche vom ersten Raum in den zweiten hinein, also von V_1 nach V_2 hin, so ergibt die Summe beider Ausdrücke, wegen $V_1 + V_2 = V$:

$$(145) \qquad \int_{V} \operatorname{div} \mathfrak{A} \, dv + \int_{F_2} (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1) \mathfrak{n} \, df = \int_{F_1} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{n} \, df.$$

Wir sehen also, daß hierbei der Gaußsche Satz zu ergänzen ist durch ein Oberflächenintegral längs der Unstetigkeitsfläche, welches von dem Sprung der normalen Komponenten von $\mathfrak{A}$ auf F_2 abhängt.

Wenden wir jetzt auf dieselbe Fig. 21 den Satz (93) an, so finden wir ganz analog

$$(146) \qquad \int_{V} \operatorname{rot} \mathfrak{A} \, dv + \int_{F_2} [\mathfrak{n}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)] \, df = \int_{F_1} [\mathfrak{n} \mathfrak{A}_1] \, df.$$

Wir kehren jetzt zu der Fig. 18 in Nr. **23** zurück und wenden den Stokesschen Satz auf die ganze Fläche f an, deren Randkurve also nur D ist.

Bezeichnen wir wieder durch f_1 denjenigen Teil von f, welcher außerhalb des Körpers (Fig. 18) liegt und durch f_2 denjenigen Teil, welcher innerhalb liegt, so erhalten wir für f_1 aus dem Stokesschen Satz

$$\text{(a)} \qquad \int\limits_{f_1} \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A}_1 \, df = \int\limits_{D} \mathfrak{A}_1 \, d\mathfrak{l} + \int\limits_{a} \mathfrak{A}_1 \, d\mathfrak{l}$$

und für f_2

$$\text{(b)} \qquad \int\limits_{f_2} \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2 \, df = \int\limits_{a} \mathfrak{A}_2 \, d\mathfrak{l}.$$

Da aber die Normale auf f überall nach einer Seite hinweist, so wird in (a) $d\mathfrak{l}$ längs a von entgegengesetzter Richtung sein als in (b). Rechnen wir jetzt als positiv diejenige Richtung von $d\mathfrak{l}$, welche der Fläche f_1 zukommt, d. h. $\mathfrak{A}_1$ entspricht, so liefert die Summe von (a) und (b) wegen $f = f_1 + f_2$:

$$(147) \qquad \int\limits_{f} \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A} \, df + \int\limits_{a} (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1) \, d\mathfrak{l} = \int\limits_{D} \mathfrak{A}_1 \, d\mathfrak{l}.$$

Ist kein Sprung der tangentialen Komponenten längs dem Körper vorhanden, so verschwindet das Integral längs a in (147). Ist außerdem noch $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$ auf f_1, so folgt aus (147) und (a) Nr. **24**:

$$\text{(c)} \qquad 4\pi J = \int\limits_{f_2} \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2 \, df.$$

Ganz analog fließt aus (e) Nr. **23**, falls wir dort die Integrale längs c und e durch $4\pi J_1$ und $4\pi J_2$ bezeichnen:

$$\text{(d)} \qquad J = J_1 + J_2.$$

Nebenbei sei bemerkt, daß (d) formal mit dem Kirchhoffschen Gesetz der Stromverzweigung übereinstimmt und (c) mit der Maxwellschen Gleichung für stationäre Ströme, falls J den Gesamtstrom in dem Teil bad des Körpers (Fig. 18) bedeutet und $\mathfrak{A}_2$ die magnetische Kraft, auch innerhalb bad.

Wir kehren jetzt zu den Ausdrücken (145) und (146) zurück. Aus denselben ersehen wir unmittelbar, daß die Größen $\operatorname{div} \mathfrak{A} \, dv$ und $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)\mathfrak{n} \, df$ einerseits, und $\operatorname{rot} \mathfrak{A} \, dv$ und $[\mathfrak{n}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)] \, df$ anderseits als gleichwertig angesehen werden müssen. Aus diesem Grunde wird das skalare Produkt $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)\mathfrak{n}$ die Flächendivergenz und das vektorielle Produkt $[\mathfrak{n}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)]$ der Flächenrotor genannt.

Da wir uns unter $\mathfrak{A}$ immer eine physikalische Größe vorstellen wollen, so müssen wir, Stetigkeit in der Natur vorausgesetzt, annehmen, daß $\mathfrak{A}$ an der Fläche F_2 keinen Sprung im mathematischen Sinn erleidet, sondern beim Durchgang durch F_2 sich stetig, wenn auch sehr schnell ändert. Dann müßten eigentlich die Integrale in (145) und (146) über f_2, vom mathematischen Standpunkt aus, verschwinden. Wir wollen sie aber dennoch beibehalten, um den physikalischen Sprung anzudeuten. Aus diesen Überlegungen folgt, daß in einem bestimmten Raum, falls dort $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ ist, auch die normalen Komponenten stetig sind. Ganz analog werden die tangentialen Komponenten stetig sein, falls $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$ ist.

26. Ableitung einiger allgemeinen Ausdrücke. Im folgenden wollen wir Stetigkeit der zu betrachtenden Größen voraussetzen. Sollen dennoch Unstetigkeiten berücksichtigt werden, so ist dies leicht vermöge Nr. **25** zu bewerkstelligen.

Wir zerlegen auf Grund von Nr. **17** zwei gegebene Vektoren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$

(a) $$\mathfrak{A}_1 = \nabla p_1 + \operatorname{rot} \mathfrak{D}_1, \quad \mathfrak{A}_2 = \nabla p_2 + \operatorname{rot} \mathfrak{D}_2$$

und wollen das Integral

(b) $$A = \int_V \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \, dv$$

bestimmen.

Es ist nach (a)

(c) $$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \nabla p_1 \nabla p_2 + \nabla p_1 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_2 + \nabla p_2 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_1 + \operatorname{rot} \mathfrak{D}_1 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_2.$$

Anderseits haben wir

(d) $$\begin{cases} \operatorname{div}(p_1 \nabla p_2) = \nabla p_1 \nabla p_2 + p_1 \nabla^2 p_2 = \nabla p_1 \nabla p_2 + p_1 \operatorname{div} \mathfrak{A}_2 \\ \operatorname{div}(p_1 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_2) = \nabla p_1 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_2 \\ \operatorname{div}[\mathfrak{D}_1 \nabla p_2] = \nabla p_2 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_1 \\ \operatorname{div}[\mathfrak{D}_1 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_2] = \operatorname{rot} \mathfrak{D}_1 \operatorname{rot} \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1 \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2. \end{cases}$$

Aus (b) (c) und (d) folgt demnach

(148) $$A = \int_V \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \, dv = \int_V (\mathfrak{D}_1 \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2 - p_1 \operatorname{div} \mathfrak{A}_2) \, dv + \\ + \int_F (p_1 \mathfrak{n} \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{D}_1 [\mathfrak{A}_2 \mathfrak{n}]) \, df.$$

Einen analogen Ausdruck erhalten wir, falls wir $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}_2$ vertauschen und entsprechend $\mathfrak{D}_1$ und p_1 mit $\mathfrak{D}_2$ und p_2. Da die linken Seiten dieser beiden Ausdrücke gleich sind, so können wir dieselben gleichsetzen. Wir überlassen dies dem Leser auszuführen und wollen in (148) $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}$ setzen. Es folgt dann

$$(149) \qquad B = \int_V \mathfrak{A}^2 dv = \int_V (\mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - p \operatorname{div} \mathfrak{A}) dv + \\ + \int_F (p \mathfrak{n} \mathfrak{A} + \mathfrak{D}[\mathfrak{A} \mathfrak{n}]) df.$$

Wir bestimmen jetzt das Integral

$$(e) \qquad B_1 = \int_V \varrho \mathfrak{A}^2 dv,$$

wo ϱ einen mit dem Ort veränderlichen Skalar bedeutet. Aus (a) folgt

$$(f) \qquad \varrho \mathfrak{A}^2 = \varrho (\nabla p)^2 + 2 \varrho \nabla p \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{D} + \varrho (\operatorname{rot} \mathfrak{D})^2.$$

Außerdem ist

$$(g) \quad \begin{cases} \operatorname{div} (\varrho p \nabla p) = \varrho (\nabla p)^2 + p \nabla \varrho \nabla p + \varrho p \nabla^2 p \\ \operatorname{div} [\varrho \mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{D}] = - \varrho \mathfrak{D} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{D} + \varrho (\operatorname{rot} \mathfrak{D})^2 + [\nabla \varrho \ \mathfrak{D}] \operatorname{rot} \mathfrak{D} \\ \operatorname{div} (\varrho p \operatorname{rot} \mathfrak{D}) = \varrho \nabla p \operatorname{rot} \mathfrak{D} + p \nabla \varrho \operatorname{rot} \mathfrak{D} \\ \operatorname{div} [\varrho \mathfrak{D} \nabla p] = \varrho \nabla p \operatorname{rot} \mathfrak{D} + \nabla p [\nabla \varrho \ \mathfrak{D}] \\ \qquad \operatorname{div} \mathfrak{A} = \nabla^2 p; \ \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{rot}^2 \mathfrak{D}. \end{cases}$$

Deshalb erhalten wir

$$(150) \ B_1 = \int_V \varrho \mathfrak{A}^2 dv = \int_V \{ \varrho \mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \varrho p \operatorname{div} \mathfrak{A} - (p \nabla \varrho + [\nabla \varrho \ \mathfrak{D}]) \} dv + \\ + \int_F \varrho (p \mathfrak{A} \mathfrak{n} + \mathfrak{D}[\mathfrak{A} \mathfrak{n}]) df.$$

Für $\varrho =$ konst. geht (150) in $B\varrho$ über.

Wir wenden uns jetzt zu dem Ausdruck (96) und setzen $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \varrho$. Wir finden dann

$$(151) \qquad \int_F \varrho \left(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \cdot \mathfrak{n} \right) df = \int_V \mathfrak{A} \operatorname{div} (\varrho \mathfrak{A}) dv + \\ + \int_V \varrho [\operatorname{rot} \mathfrak{A} \ \ \mathfrak{A}] dv - \tfrac{1}{2} \int_V \mathfrak{A}^2 \nabla \varrho dv.$$

Nun ist

$$\text{(h)}\quad \int\limits_F \varrho\mathfrak{B}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{n}\,df = \int\limits_V \operatorname{div}(\mathfrak{A}\cdot\varrho\mathfrak{B}\mathfrak{A})\,dv = \int\limits_V \mathfrak{B}\mathfrak{A}\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{A})\,dv + \\ + \int\limits_V \varrho\mathfrak{A}\nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{A})\,dv$$

und

$$\text{(i)}\quad \int\limits_F \frac{\varrho\mathfrak{A}^2}{2}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{n}\,df = \int\limits_V \tfrac{1}{2}\operatorname{div}(\mathfrak{B}\cdot\varrho\mathfrak{A}^2)\,dv = \tfrac{1}{2}\int\limits_V \mathfrak{A}^2\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{B})\,dv + \\ + \tfrac{1}{2}\int\limits_V \varrho\mathfrak{B}\nabla\mathfrak{A}^2\,dv.$$

Subtrahiert man (i) von (h) und beachtet (68), (74) und (32), so folgt:

$$(152)\quad \int\limits_F \varrho\left(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{n}\right)df = \int\limits_V \mathfrak{B}\mathfrak{A}\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{A})\,dv + \\ + \int\limits_V \varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}\,dv + \int\limits_V \varrho\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}]\,dv - \tfrac{1}{2}\int\limits_V \mathfrak{A}^2\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{B})\,dv.$$

Ist im speziellen Fall $\mathfrak{B} = \mathfrak{r}$, so ergibt sich wegen (100) und (101)

$$(153)\quad \int\limits_V \varrho\mathfrak{A}^2\,dv = 2\int\limits_V \mathfrak{r}\mathfrak{A}\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{A})\,dv + 2\int\limits_V \varrho\mathfrak{A}[\mathfrak{r}\operatorname{rot}\mathfrak{A}]\,dv - \\ - \int\limits_V \mathfrak{A}^2\cdot\mathfrak{r}\nabla\varrho\,dv - 2\int\limits_F \varrho\left(\mathfrak{r}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{n}\right)df,$$

wo für den Aufpunkt von $\mathfrak{r}$ irgendein im Raume fester Punkt angenommen wird. Wir nehmen jetzt $\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$ und $\varrho = \text{konst.}$ an. Dann fließt aus (153)

$$(154)\quad \int\limits_V \mathfrak{A}^2\,dv = 2\int\limits_V \mathfrak{r}\mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{A}\,dv - 2\int\limits_F \left(\mathfrak{r}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mathfrak{r}\mathfrak{n}\right)df$$

und aus (149)

$$(155)\quad \int\limits_V \mathfrak{A}^2\,dv = \int\limits_F (p\mathfrak{n}\mathfrak{A} + \mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{n}])\,df - \int\limits_V p\operatorname{div}\mathfrak{A}\,dv.$$

Es stellt demnach (150) und (153) eine und dieselbe Größe dar, und ebenfalls (154) und (155). Wir können aber zu den letzten zwei noch einen dritten Ausdruck hinzufügen, auch unter der Annahme rot $\mathfrak{A} = 0$ und $\varrho =$ konst., und zwar auf Grund von (141). Dann erhalten wir

$$(156) \qquad \int_V \mathfrak{A}^2 dv = \int_F q \mathfrak{A} \mathfrak{n} df + \varkappa \int_{F_1} \mathfrak{A} \mathfrak{n} df - \int_V q \operatorname{div} \mathfrak{A} dv.$$

Während alle hier abgeleiteten Ausdrücke außer (156) unabhängig davon sind, ob der Raum einfach oder mehrfach zusammenhängend ist, trägt der Ausdruck (156) diesem Umstande Rechnung. Es ist hierbei zu bemerken, daß (156) nur für einen zweifach zusammenhängenden Raum gilt. Diese Rechnungen lassen sich leicht für einen n-fach zusammenhängenden Raum verallgemeinern.

Kapitel VI.

Geometrische Darstellung.

27. Vektorlinien und Niveauflächen. Den Begriff eines Feldes, den wir in Nr. **6** eingeführt haben, wollen wir jetzt näher besprechen. Zu diesem Zweck ist es von Vorteil die geometrische Methode anzuwenden, welche die Eigenschaften der Felder mit großer Anschaulichkeit zu untersuchen gestattet. Da wir im allgemeinen eine Abhängigkeit von der Zeit voraussetzen müssen, so bezieht sich das Folgende nur auf einen bestimmten Zeitmoment, d.h. wir müssen uns den Zustand des Feldes in einem gewissen Moment fixiert denken. Auf diesen fixierten Zustand wollen wir die geometrische Methode anwenden.

Gegeben sei ein Vektorfeld. Wir denken uns in ihm eine Kurve gezogen, von solcher Eigenschaft, daß die Tangente an sie in jedem Punkt mit der Richtung des Vektors zusammenfällt. Man nennt eine solche Kurve eine Vektorlinie. Durch einen beliebigen Punkt des gegebenen Vektorfeldes läßt sich eine solche Vektorlinie ziehen. Es ist augenscheinlich, daß sich zwei Vektorlinien nicht schneiden können. Denn dies würde bedeuten, daß in dem Schnittpunkt der entsprechende Vektor nicht eindeutig bezüglich seiner Richtung ist. Und das ist unmöglich, solange wir unter einem Vektor eine physikalische Größe verstehen.

Gegeben sei jetzt ein skalares Feld. In diesem greifen wir einen Punkt heraus, dem ein gewisser Wert des Skalars entspricht. Wir suchen jetzt im gegebenen Feld alle diejenigen Punkte auf, die demselben Wert des Skalars entsprechen, und legen durch die so gefundenen Punkte eine Fläche. Eine solche Fläche nennt man eine Niveaufläche. Auf einer Niveaufläche hat demnach der Skalar einen konstanten Wert. Auch hier ist es augenscheinlich, daß sich zwei Niveauflächen nicht schneiden können; denn das widerspräche der Eindeutigkeit, die wir bei einem physikalischen Felde stets annehmen müssen.

28. Lamellare Felder. Wir denken uns in einem Vektorfeld die Vektorlinien gezogen und fragen nach der Bedingung, welcher der Vektor zu genügen hat, damit sich zu den Vektorlinien orthogonale Flächen legen lassen. Diese Bedingung läßt sich sofort aus dem Stokesschen Satz (87) ableiten. Ist nämlich f eine solche orthogonale Fläche, so haben wir $\mathfrak{n} = \mathfrak{A}_0$, wo $\mathfrak{A}_0$ den Einheitsvektor von $\mathfrak{A}$ bedeutet. Infolgedessen ist aber $\mathfrak{A} d\mathfrak{l} = 0$, und wir erhalten aus (87)

$$\text{(a)} \qquad \int_F \mathfrak{A}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{A} \, df = 0.$$

Da aber diese Beziehung für einen beliebigen Teil von f gelten muß, so erhalten wir aus (a) die Bedingung für die Existenz orthogonaler Flächen, falls wir noch mit dem Betrag von $\mathfrak{A}$ multiplizieren,

$$(157) \qquad \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0.$$

Ein Vektorfeld, innerhalb dessen der Vektor der Bedingung (157) genügt, nennt man ein komplex-lamellares, weil durch die orthogonalen Flächen das Feld in Lamellen geteilt werden kann.

Ist $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$, so ist eo ipso (157) erfüllt. Dann ist $\mathfrak{A} = \nabla q$. Da nun auf den Niveauflächen q konstant ist, so steht der Gradient von q, d. h. $\mathfrak{A}$ senkrecht zu denselben. In diesem Fall sind also die Niveauflächen von q die zu $\mathfrak{A}$ orthogonalen Flächen. Ein solches Feld nennt man einfach ein lamellares.

Es seien DC und AB (Fig. 22) die Schnittkurven von Teilen zweier unendlich nahen Niveauflächen eines lamellaren Feldes mit der Zeichenebene. DA und CB fallen mit den Vektorlinien zusammen. Da die Niveauflächen unendlich nahe sind, so können wir

setzen $DA = d\mathfrak{l}_1$ und $CB = d\mathfrak{l}_2$ und erhalten, falls wir auf die Fig. 22 den Stokesschen Satz anwenden, da $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$ ist,

(b) $$\mathfrak{A}_1 d\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{A}_2 d\mathfrak{l}_2 = 0.$$

Der positive Umlaufsinn ist durch den Pfeil angegeben. Betrachten wir aber als positive Richtung von $d\mathfrak{l}_1$ resp. $d\mathfrak{l}_2$ diejenige von der Niveaufläche DC zu der Fläche AB zu, so können wir statt (b) schreiben $|\mathfrak{A}_1| dl_1 = |\mathfrak{A}_2| dl_2$, woraus folgt

(158) $$\frac{|\mathfrak{A}_1|}{|\mathfrak{A}_2|} = \frac{dl_2}{dl_1}$$

Fig. 22.

d. h. die Dicken dl_2 und dl_1 der Lamelle, welche durch die beiden unendlich nahen orthogonalen Flächen gebildet wird, verhalten sich umgekehrt wie die Beträge der Vektoren an den entsprechenden Stellen.

Für ein komplex-lamellares Feld gilt die Beziehung (158) nicht. Hierdurch unterscheidet es sich von einem lamellaren.

Sind in einem lamellaren Feld die Niveauflächen für Werte des Potentials gezeichnet, die sich um eine bestimmte konstante Größe unterscheiden, so geben uns diese Niveauflächen nicht nur Aufschluß über die Richtung des betreffenden Vektors, sondern auch über den Betrag desselben. Denn wo sich zwei benachbarte Niveauflächen nähern, wird der Betrag des Vektors laut (158) größer, und umgekehrt wird derselbe kleiner dort, wo sich die Niveauflächen entfernen.

29. Solenoidale Felder. Wir denken uns jetzt in einem Vektorfeld eine Röhre gezeichnet, deren Mantelfläche aus Vektorlinien gebildet ist (Fig. 23). Die positive Richtung der Vektorlinien ist durch die Pfeile angegeben. Die Röhre sei durch die Flächen f_1 und f_2 begrenzt. Auf diese Röhre wollen wir den Gaußschen Satz anwenden. Es wird für die Mantelfläche überall $\mathfrak{A}d\mathfrak{f} = 0$ sein, und wir erhalten deshalb

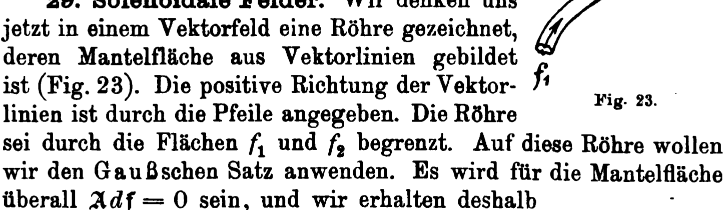


Fig. 23.

(a) $$\int_V \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dv = \int_{f_1} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} + \int_{f_2} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f}.$$

Ist innerhalb der Röhre div $\mathfrak{A} = 0$, und kehren wir die Richtung der Normale auf f_1 um, so folgt aus (a)

$$\int_{f_1} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} = \int_{f_2} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f}, \tag{b}$$

d. h. das Flächenintegral längs eines beliebigen Querschnitts der Röhre ist konstant, sobald die Bedingung div $\mathfrak{A} = 0$ erfüllt ist. Dieses Flächenintegral nennt man die Stärke der Röhre und ein Feld, wo div $\mathfrak{A} = 0$ ist, ein solenoidales ($\sigma\omega\lambda\eta\nu$ = Röhre), denn man kann ein solches Feld in Solenoide (Röhren) von konstanter Stärke zerteilen.

Ist das Feld außerdem lamellar oder komplex-lamellar, so können wir f_1 und f_2 als Teile der orthogonalen Flächen betrachten. Machen wir wieder den Querschnitt der Röhren unendlich klein, so können wir statt (b) auch schreiben

$$\frac{|\mathfrak{A}_1|}{|\mathfrak{A}_2|} = \frac{df_2}{df_1}, \tag{159}$$

d. h. in einem komplex-lamellar-solenoidalen oder lamellar-solenoidalen Feld verhalten sich die Querschnitte eines unendlich dünnen Solenoids umgekehrt wie die Beträge der Vektoren an den entsprechenden Stellen.

Denken wir uns jetzt ein solches Feld in Solenoide zerteilt, so geben uns diese einen Aufschluß nicht nur über die Richtung des Vektors, sondern auch über dessen Betrag. Denn eine Erweiterung des Solenoids entspricht einer Verkleinerung des Betrages und umgekehrt.

30. Allgemeinere Fälle. Haben wir ein beliebiges Vektorfeld, so können wir dennoch die Vektorlinien so ziehen, daß sie außer der Richtung auch den Betrag des Vektors anzeigen. Wir denken uns zu dem Zweck die Vektorlinien gezeichnet und greifen durch eine unendlich kleine geschlossene Kurve L ein Büschel solcher Linien heraus. Die durch L begrenzte Fläche f soll in m Punkten durch die Vektorlinien des Büschels durchstoßen werden. Machen wir $\frac{m}{f}$ gleich dem Betrag des Vektors, d. h. nehmen wir an, daß die Dichte der Vektorlinien so beschaffen ist, daß die Einheit der Fläche f durch so viel Vektorlinien durchstoßen wird, als dem Betrag des Vektors in dem betreffenden Punkt entspricht, so gibt uns diese Dichte einen Aufschluß über den Betrag des Vektors.

Dort wo die Dichte der Vektorlinien größer ist, ist auch der Betrag größer und umgekehrt.

Wir wollen jetzt annehmen, ein Teil V_1 des Feldes sei lamellar, also rot $\mathfrak{A} = 0$, während im anderen Teil V_2 des Feldes rot $\mathfrak{A}$ von Null verschieden ist. Außerdem sei $\mathfrak{A}$ überall stetig. Es ist dann leicht zu zeigen, daß V_1 und V_2 mehrfach zusammenhängend sein müssen. Denn angenommen V_2 sei einfach zusammenhängend, etwa wie in Fig. 24. Nehmen wir dann ein Linienintegral längs einer Kurve L, die vollständig innerhalb V_1 verläuft, so können wir L als Randkurve einer Fläche f_1 auffassen, die außerhalb V_2 liegt, eben weil V_2 als einfach zusammenhängend vorausgesetzt ist. Es ist deshalb L eine reduzierbare Kurve, und wir erhalten aus dem Stokesschen Satz

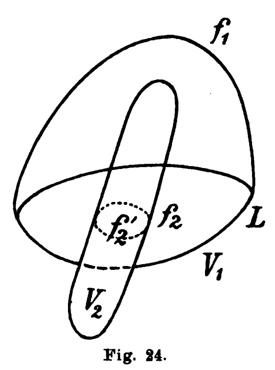


Fig. 24.

(a) $$\int_L \mathfrak{A}\, d\mathfrak{l} = 0.$$

Anderseits können wir L als Randkurve einer Fläche f_2 auffassen, welche V_2 schneidet. Bezeichnen wir den innerhalb V_2 liegenden Teil von f_2 durch f_2', so erhalten wir aus dem Stokesschen Satz, da $\mathfrak{A}$ als stetig angenommen ist:

(b) $$\int_{f_2'} \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, df = 0.$$

Da dies aber für eine beliebige Lage von f_2' in bezug auf V_2 gilt, so folgt für V_2 ebenfalls: rot $\mathfrak{A} = 0$. Dies widerspricht aber unseren Annahmen. Wir folgern deshalb, daß V_2 einen mehrfach zusammenhängenden Raum bilden muß. Denn ist z. B. V_2 ein Ring, so können wir L, wenn es den Ring umschließt, nicht als die Randkurve einer Fläche auffassen, die vollständig außerhalb V_2 liegt. Diese Fläche wird den Ring immer durchschneiden müssen. Aus dem Stokesschen Satz erhalten wir dann

(c) $$\int_L \mathfrak{A}\, d\mathfrak{l} = \int_{f_2'} \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, df,$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

Kapitel VII.

Analytische Darstellung.

31. Skalares und vektorielles Produkt. Wir wollen jetzt mit Hilfe des in Nr. **2** eingeführten Koordinatensystems das skalare und vektorielle Produkt zweier Vektoren ausdrücken. Diese Vektoren seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Dann haben wir aus (8)

(a) $$\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{B} = B_1\mathfrak{i} + B_2\mathfrak{j} + B_3\mathfrak{k}.$$

Berücksichtigen wir, daß für das gewählte Koordinatensystem sein wird

(160) $$\begin{cases} \mathfrak{i}^2 = 1; \ \mathfrak{j}^2 = 1; \ \mathfrak{k}^2 = 1 \\ \mathfrak{i}\mathfrak{j} = 0; \ \mathfrak{j}\mathfrak{k} = 0; \ \mathfrak{i}\mathfrak{k} = 0 \end{cases}$$

(161) $$\begin{cases} [\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}; \ [\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}; \ [\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = \mathfrak{j} \\ [\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = 0; \ [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = 0; \ [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0, \end{cases}$$

so erhalten wir leicht

(162) $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

(163) $$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathfrak{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \\ + \mathfrak{k}(A_1B_2 - A_2B_1).$$

Der Ausdruck (162) ist ein bekannter Satz aus der analytischen Geometrie, und (163) ist nichts anderes als die geometrische Summe der Projektionen des durch die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Parallelogramms auf die entsprechenden Koordinatenebenen. So ist das erste Glied in (163) die Projektion des Parallelogramms auf die YZ-Ebene.

Es ist jetzt leicht, vermittelst (160) und (161) beliebige andere Produkte darzustellen.

32. Tangente und Krümmungsradius einer Raumkurve. Es sei PS ein Stück einer beliebigen Raumkurve (Fig. 25). Durch l bezeichnen wir die Länge längs der Kurve, von P aus gerechnet. Von einem beliebigen Aufpunkt O ziehen wir einen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ bis zum Punkte M der Kurve. Ein benachbarter, in sehr kleiner Entfernung liegender Punkt auf derselben Kurve sei durch M' bezeichnet. Dann ist $PM = l$ und $MM' = dl$. Anderseits hat

der Vektor $\mathfrak{r}$ beim Übergang von M zu M' einen Zuwachs $d\mathfrak{r}$ erhalten. Im Grenzfall, bei unendlicher Annäherung von M' an M wird der Betrag von $d\mathfrak{r}$ gleich dl sein, und wir erhalten deshalb

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dl} = \mathfrak{t}_0, \tag{164}$$

wo $\mathfrak{t}_0$ einen Einheitsvektor bedeutet, welcher mit der Richtung der Tangente an die Kurve im Punkte M zusammenfällt.

Wir ziehen jetzt vom Krümmungsmittelpunkt des Elementes dl zwei Radien von der Länge R nach M und M'. Es ist dann $dl = R d\varphi$, wo $d\varphi$ den Winkel zwischen den Radien bedeutet. Für die Richtung $\mathfrak{t}_0'$ der Tangente in M' haben wir $\mathfrak{t}_0' = \mathfrak{t}_0 + d\mathfrak{t}_0$. Da aber $d\mathfrak{t}_0$ in der Ebene von $\mathfrak{t}_0'$ und $\mathfrak{t}_0$ liegt, wie aus der eben angeführten Beziehung für $\mathfrak{t}_0'$ folgt, so liegt es zugleich in der Osculations- oder Schmiegungsebene der Kurve. Außerdem sind $\mathfrak{t}_0'$ und $\mathfrak{t}_0$ senkrecht zu den beiden Radien und infolgedessen der Winkel zwischen ihnen auch gleich $d\varphi$. Deshalb hat der Betrag von $d\mathfrak{t}_0$, da die Beträge von $\mathfrak{t}_0'$ und $\mathfrak{t}_0$ gleich und gleich Eins sind, den Wert $d\varphi$. Da aber nach (42) $d\mathfrak{t}_0$ senkrecht zu $\mathfrak{t}_0$ ist und außerdem in der Schmiegungsebene liegt, so fällt der Vektor $d\mathfrak{t}_0$ in die Richtung des Krümmungsradius im Punkte M, und zwar weist er zum Krümmungsmittelpunkte hin.

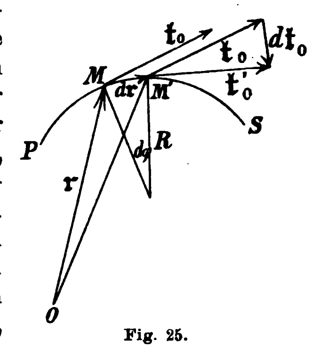


Fig. 25.

Bezeichnen wir einen in dieser Richtung weisenden Einheitsvektor durch $\mathfrak{R}_0$, so erhalten wir demnach

$$d\mathfrak{t}_0 = d\varphi \mathfrak{R}_0 = \frac{dl \mathfrak{R}_0}{R}$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{t}_0}{dl} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dl^2} = \frac{\mathfrak{R}_0}{R}. \tag{165}$$

33. Einführung krummliniger orthogonaler Koordinaten. Bei der Anwendung des Gaußschen Satzes und anderer Oberflächenintegrale, insbesondere der Ausdrücke in Nr. **17**, können wir bemerken, daß es von Wichtigkeit ist, die normale und die tangentiale Komponente eines Vektors zur Oberfläche F zu kennen. Es ist deshalb vorteilhaft für die Rechnungen, von vornherein

orthogonale Koordinaten einzuführen, und zwar im allgemeinen Fall krummlinige, und die Oberfläche F mit den Koordinatenflächen zusammenfallen zu lassen.

Als Beispiel solcher krummliniger Koordinaten betrachten wir die sogenannten sphärischen Koordinaten. Mit Hilfe derselben kann ein Punkt P im Raum folgendermaßen bestimmt werden. Wir konstruieren um den Koordinatenanfang, wo wir uns vorläufig ein Rechtssystem festgelegt denken, eine Kugel mit dem Radius r. Hierbei bedeutet r die Entfernung vom Koordinatenanfang bis zum Punkt P. Die positive Richtung von r, d. h. die des Einheitsvektors $\mathfrak{r}_0$, ziele nach dem Punkte P zu. φ bedeute den Winkel zwischen den positiven Richtungen von r und der Z-Achse. Dieser Winkel kann Werte von 0 bis π annehmen. Weiter bedeute ϑ den Winkel zwischen der XZ-Ebene und derjenigen, durch die Z-Achse gehenden Ebene, in welcher r liegt. Der Winkel ϑ wird von 0 bis 2π gezählt von der XZ-Ebene aus und zwar positiv im Sinne der Drehung des Uhrzeigers, falls man längs der positiven Richtung der Z-Achse sieht.

Mit Hilfe dieser Koordinaten r, φ und ϑ läßt sich der ganze Raum in Volumenelemente teilen, wobei jedes als ein Quader angesehen werden kann. Die Kanten dieses Quaders sind $r\,d\varphi$, $r \sin\varphi\, d\vartheta$ und dr. Die Diagonale dl und demnach ein beliebiges Linienelement bestimmt sich durch

$$\text{(a)} \qquad (dl)^2 = (r\,d\varphi)^2 + (r \sin\varphi\, d\vartheta)^2 + (dr)^2.$$

Wir legen jetzt in den Punkt P ein rechtwinkliges Rechtssystem und zwar so, daß die Z-Achse mit dr, d. h. mit der Richtung $\mathfrak{r}_0$, zusammenfällt, die X-Achse senkrecht zu r und in der Richtung der wachsenden φ und die Y-Achse in die Richtung der wachsenden ϑ. Die entsprechenden Einheitsvektoren bezeichnen wir, zur Unterscheidung von denjenigen, welche dem in den Koordinatenanfang gelegten Rechtssystem entsprechen, durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. Dann wird das Linienelement $d\mathfrak{l}$ dargestellt werden können durch

$$\text{(166)} \qquad d\mathfrak{l} = \mathfrak{a}\, r\,d\varphi + \mathfrak{b}\, r \sin\varphi\, d\vartheta + \mathfrak{c}\, dr.$$

Durch Quadrieren dieses Ausdruckes kommen wir zu (a) zurück.

Nach diesem Beispiel, welches wir zum Verständnis des Folgenden angeführt haben, wollen wir zu beliebigen krummlinigen orthogonalen Koordinaten übergehen. Auch hier kann man sich den

Raum in unendlich kleine rechtwinklige Quader zerlegt denken. Die Kanten eines solchen Quaders seien dem Betrage nach gleich oa, ob und oc, und fallen ihrer Richtung nach mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ im Sinne eines Rechtsystems zusammen (Fig. 26). Bezeichnen wir durch α, β, γ die entsprechenden Koordinaten, so ist

$$oa = \mathfrak{a} M d\alpha,$$
$$\text{(b)} \quad ob = \mathfrak{b} N d\beta,$$
$$oc = \mathfrak{c} P d\gamma.$$

Fig. 26.

Hier bedeuten M, N, P gewisse Funktionen von α, β und γ. Haben wir z. B. sphärische Koordinaten, so ist:

$$\alpha = \varphi; \; \beta = \vartheta; \; \gamma = r \text{ und } M = r; \; N = r \sin\varphi; \; P = 1.$$

Die Richtung der wachsenden α, β und γ soll mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenfallen.

Das Linienelement $d\mathfrak{l}$ (op in der Fig.) ist dann gleich

$$d\mathfrak{l} = \mathfrak{a} M d\alpha + \mathfrak{b} N d\beta + \mathfrak{c} P d\gamma, \tag{167}$$

und das Volumenelement dv ist

$$dv = MNP\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma. \tag{168}$$

Wir müssen betonen, daß das System $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ grundverschieden von dem System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ist. Denn obwohl beide Rechtssysteme sind, so ist die Lage des ersteren für jeden Punkt des Raumes eine verschiedene, während das zweite System vollständig fest ist. Demnach ist z. B. $\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \alpha}$ eine von Null verschiedene Größe. Dies vorausgeschickt, wollen wir die Integrale (6) und (19) auf unseren elementaren Quader anwenden.

Wir bilden zuerst das Oberflächenintegral. Für die Fläche *ocea* haben wir, da die äußere Normale entgegengesetzt $\mathfrak{b}$ ist,

$$d\mathfrak{f}_1 = -\mathfrak{b} MPd\alpha d\gamma.$$

Für die gegenüberliegende Fläche *bdph* erhalten wir

$$d\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{b} MPd\alpha d\gamma + MP\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \beta}d\beta d\alpha d\gamma + \mathfrak{b}\frac{\partial MP}{\partial \beta}d\beta d\alpha d\gamma.$$

Die Summe $d\mathfrak{f}_1 + d\mathfrak{f}_2$ ist deshalb

$$d\mathfrak{f}_1 + d\mathfrak{f}_2 = \left(MP\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \beta} + \mathfrak{b}\frac{\partial MP}{\partial \beta}\right) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Bilden wir die entsprechenden Summen für die zwei anderen Paare von Flächen und addieren alle so erhaltenen Ausdrücke, so folgt aus (19)

$$\begin{aligned}(169)\qquad &\mathfrak{a}\frac{\partial NP}{\partial \alpha} + NP\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \alpha} + \mathfrak{b}\frac{\partial MP}{\partial \beta} + MP\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \beta} + \\ &\quad + \mathfrak{c}\frac{\partial MN}{\partial \gamma} + MN\frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \gamma} = 0\end{aligned}$$

oder einfacher

$$(169a)\qquad \frac{\partial NP\mathfrak{a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial MP\mathfrak{b}}{\partial \beta} + \frac{\partial MN\mathfrak{c}}{\partial \gamma} = 0.$$

Wir bestimmen jetzt das Linienintegral (6) längs dem Rand der Fläche *oahb*. Die Umlaufrichtung ist durch $\mathfrak{c}$ bestimmt, welches wir als positive Normale zu *oahb* auffassen wollen.

Für das Linienelement *oa* finden wir

$$d\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{a} Md\alpha.$$

Für das gegenüberliegende Linienelement *hb* ist

$$d\mathfrak{l}_3 = -\mathfrak{a} Md\alpha - \mathfrak{a}\frac{\partial M}{\partial \beta}d\alpha d\beta - M\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \beta}d\alpha d\beta.$$

Für das Element *ob*

$$d\mathfrak{l}_4 = -\mathfrak{b} Nd\beta$$

und endlich für *ah*

$$d\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{b} Nd\beta + \mathfrak{b}\frac{\partial N}{\partial \alpha}d\alpha d\beta + N\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha}d\alpha d\beta.$$

Die Summe aller $d\mathfrak{l}$ ergibt infolge (6)

$$\mathfrak{a}\frac{\partial M}{\partial \beta} - \mathfrak{b}\frac{\partial N}{\partial \alpha} + M\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \beta} - N\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha} = 0 \tag{170}$$

oder

$$\frac{\partial M\mathfrak{a}}{\partial \beta} - \frac{\partial N\mathfrak{b}}{\partial \alpha} = 0. \tag{170a}$$

Ganz analog erhalten wir die entsprechenden Ausdrücke für die beiden Flächen $ocdb$ und $ocea$, wobei jetzt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als positive Normalen zu betrachten sind:

$$\frac{\partial N\mathfrak{b}}{\partial \gamma} - \frac{\partial P\mathfrak{c}}{\partial \beta} = 0 \tag{171}$$

$$\frac{\partial P\mathfrak{c}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M\mathfrak{a}}{\partial \gamma} = 0. \tag{172}$$

Multiplizieren wir (170), (171) und (172) je mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und berücksichtigen hierbei (40), so folgt:

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = N\mathfrak{a}\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial N}{\partial \gamma} = P\mathfrak{b}\frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = M\mathfrak{c}\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \gamma} \tag{173}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = M\mathfrak{b}\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial P}{\partial \beta} = N\mathfrak{c}\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \gamma}, \qquad \frac{\partial M}{\partial \gamma} = P\mathfrak{a}\frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \alpha} \tag{174}$$

$$M\mathfrak{c}\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \beta} = N\mathfrak{c}\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \alpha}, \qquad N\mathfrak{a}\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \gamma} = P\mathfrak{a}\frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \beta}, \qquad P\mathfrak{b}\frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial \alpha} = M\mathfrak{b}\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \gamma}. \tag{175}$$

34. Einige vektoranalytische Operationen ausgedrückt mittelst orthogonaler krummliniger Koordinaten. Mit Hilfe der in Nr. **33** abgeleiteten Relationen bestimmen wir den Gradienten eines Skalars p. Als Volumen V nehmen wir das Volumen des kleinen Quaders gemäß (168). Bei Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung können wir p als konstant auf der Fläche $ocea$ und gleich dem Werte in O annehmen und erhalten dann für diese Fläche

$$d\mathfrak{f}_1 p_1 = -\,\mathfrak{b}\, p M P\, d\alpha\, d\gamma$$

und für die gegenüberliegende Fläche $bdph$

$$d\mathfrak{f}_2 p_2 = \mathfrak{b}\, p M P\, d\alpha\, d\gamma + \mathfrak{b}\frac{\partial pMP}{\partial \beta}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma + pMP\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \beta}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Die Summe ergibt

$$d\mathfrak{f}_1 p_1 + d\mathfrak{f}_2 p_2 = \left(\mathfrak{b}\, MP \frac{\partial p}{\partial \beta} + \mathfrak{b}\, p \frac{\partial MP}{\partial \beta} + pMP \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \beta}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für die zwei anderen Paare von Flächen. Summieren wir diese Ausdrücke und berücksichtigen hierbei (169), so finden wir nach Division mit dem Volumen (168) gemäß (44)

$$\nabla p = \mathfrak{a} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \mathfrak{b} \frac{1}{N} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \mathfrak{c} \frac{1}{P} \frac{\partial p}{\partial \gamma}, \tag{176}$$

oder falls wir statt ∇ symbolisch schreiben

$$\nabla = \mathfrak{a} \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \mathfrak{b} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} + \mathfrak{c} \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \tag{177}$$

können wir (176) als Produkt von ∇ und p auffassen.

Wir wollen jetzt $\nabla \mathfrak{A} = \operatorname{div} \mathfrak{A}$ bestimmen, wobei $\mathfrak{A}$ gegeben ist durch

$$\mathfrak{A} = A_1 \mathfrak{a} + A_2 \mathfrak{b} + A_3 \mathfrak{c}. \tag{a}$$

Ganz analog wie bei der Ableitung von (176) nehmen wir $\mathfrak{A}$ längs der Fläche *ocea* als konstant an und erhalten demnach hierfür

$$d\mathfrak{f}_1 \mathfrak{A}_1 = - A_2 MP\, d\alpha\, d\beta$$

und für die gegenüberliegende Fläche *bdph*

$$d\mathfrak{f}_2 \mathfrak{A}_2 = A_2 MP\, d\alpha\, d\gamma + \frac{\partial A_2 MP}{\partial \beta}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Die Summe liefert

$$d\mathfrak{f}_1 \mathfrak{A}_1 + d\mathfrak{f}_2 \mathfrak{A}_2 = \frac{\partial A_2 MP}{\partial \beta}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Addieren wir hierzu die entsprechenden Ausdrücke für die zwei anderen Flächenpaare, so erhalten wir nach Division mit dem Volumen (168) gemäß (45):

$$\nabla \mathfrak{A} = \operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{MNP} \left\{ \frac{\partial A_1 NP}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_2 MP}{\partial \beta} + \frac{\partial A_3 MN}{\partial \gamma} \right\}. \tag{178}$$

Diesen selben Ausdruck könnten wir auch erhalten durch skalare Multiplikation von (177) und (a) unter Berücksichtigung von (40),

(173) und (174). Wir überlassen es dem Leser sich hiervon zu überzeugen. Dabei ist z. B. selbstverständlich

$$\frac{\mathfrak{n}}{M}\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_1\mathfrak{a}+A_2\mathfrak{b}+A_3\mathfrak{c})=\frac{\mathfrak{n}}{M}\frac{\partial A_1\mathfrak{a}}{\partial\alpha}+\frac{\mathfrak{n}}{M}\frac{\partial A_2\mathfrak{b}}{\partial\alpha}+\frac{\mathfrak{n}}{M}\frac{\partial A_3\mathfrak{c}}{\partial\alpha}.$$

Wir kommen jetzt zur Bestimmung von $[\nabla\mathfrak{A}]=\operatorname{rot}\mathfrak{A}$ gemäß (46). Für die Fläche $oaec$ erhalten wir

$$[d\mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_1]=MP(A_1\mathfrak{c}-A_3\mathfrak{a})\,d\alpha d\gamma,$$

falls wir wieder auf dieser Fläche $\mathfrak{A}$ als konstant betrachten. Für die gegenüberliegende Fläche $bdph$ ist

$$[d\mathfrak{f}_2\mathfrak{A}_2]=-MP(A_1\mathfrak{c}-A_3\mathfrak{a})\,d\alpha d\gamma-\Big\{\mathfrak{c}\frac{\partial MPA_1}{\partial\beta}-\mathfrak{a}\frac{\partial MPA_3}{\partial\beta}+$$
$$+MPA_1\frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial\beta}-MPA_3\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial\beta}\Big\}d\alpha d\beta d\gamma.$$

Die Summation ergibt unter Berücksichtigung von (170) und (171)

$$[d\mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_1]+[d\mathfrak{f}_2\mathfrak{A}_2]=\Big\{\mathfrak{a}M\frac{\partial PA_3}{\partial\beta}-\mathfrak{c}P\frac{\partial MA_1}{\partial\beta}+PA_3\frac{\partial N\mathfrak{b}}{\partial\alpha}-$$
$$-MA_1\frac{\partial N\mathfrak{b}}{\partial\gamma}\Big\}d\alpha d\beta d\gamma.$$

Addiert man hierzu die entsprechenden Ausdrücke für die zwei anderen Flächenpaare, so gewinnt man mit Hilfe von (170), (171) und (172), nach Division mit dem Volumen (168) gemäß (46)

$$(179)\quad\begin{cases}[\nabla\mathfrak{A}]=\operatorname{rot}\mathfrak{A}=\mathfrak{a}\dfrac{1}{NP}\left(\dfrac{\partial PA_3}{\partial\beta}-\dfrac{\partial NA_2}{\partial\gamma}\right)+\\[2ex]+\mathfrak{b}\dfrac{1}{MP}\left(\dfrac{\partial MA_1}{\partial\gamma}-\dfrac{\partial PA_3}{\partial\alpha}\right)+\mathfrak{c}\dfrac{1}{MN}\left(\dfrac{\partial NA_2}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial MA_1}{\partial\beta}\right).\end{cases}$$

Wir stellen jetzt dem Leser folgende zwei Aufgaben. Erstens zeige man, daß man (179) auch direkt durch vektorielle Multiplikation von (a) und (177) erhalten kann. Hierzu gebrauche man die Gleichungen (170)—(172).

Zweitens leite man ganz analog wie (170) die Darstellung (179) aus (86) ab, indem man $\mathfrak{n}$ sukzessive mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenfallen läßt und als f die Flächen $obdc$, $ocea$ und $oahb$ annimmt. Hierbei erhält man die Beträge der Komponenten von rot $\mathfrak{A}$ nach den

Richtungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, und dann durch geometrische Summierung Gleichung (179).

Ist im speziellen Fall $\mathfrak{A} = \nabla p$, so folgt aus (176) und (a)

$$(180) \qquad A_1 = \frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial \alpha}, \quad A_2 = \frac{1}{N}\frac{\partial p}{\partial \beta}, \quad A_3 = \frac{1}{P}\frac{\partial p}{\partial \gamma},$$

und wir erhalten aus (178)

$$(181)\ \operatorname{div} \nabla p = \nabla^2 p = \frac{1}{MNP}\left\{\frac{\partial \frac{NP}{M}\frac{\partial p}{\partial \alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \frac{MP}{N}\frac{\partial p}{\partial \beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \frac{MN}{P}\frac{\partial p}{\partial \gamma}}{\partial \gamma}\right\}.$$

Setzen wir hier die linke Seite gleich Null, so finden wir die Laplacesche Gleichung, ausgedrückt in orthogonalen krummlinigen Koordinaten.

Wir multiplizieren jetzt (177) skalar mit sich selbst und erhalten

$$(182) \qquad \nabla^2 = \mathfrak{a}\frac{1}{M}\frac{\partial \nabla}{\partial \alpha} + \mathfrak{b}\frac{1}{N}\frac{\partial \nabla}{\partial \beta} + \mathfrak{c}\frac{1}{P}\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma}$$

oder mit Berücksichtigung von (40), (173)—(175)

$$(182\text{a}) \qquad \nabla^2 = \frac{1}{MNP}\left\{\frac{\partial \frac{NP}{M}\frac{\partial}{\partial \alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \frac{MP}{N}\frac{\partial}{\partial \beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \frac{MN}{P}\frac{\partial}{\partial \gamma}}{\partial \gamma}\right\}.$$

Eine Multiplikation von (182a) mit p ergibt (181). Dies deckt sich auch mit dem Ausdruck (82). Wir können deshalb auch ∇^2 als einen Differentialoperator auffassen und zwar als einen skalaren der zweiten Ordnung.

Vergleichen wir jetzt (25), wo wir uns an Stelle des Skalars p den skalaren Operator ∇^2 denken müssen, mit (76), so gelangen wir hierdurch zu dem Wert von $\nabla^2 \mathfrak{A}$. Dabei muß $\mathfrak{A}$ in der Form (a) dargestellt sein. Bei der tatsächlichen Berechnung von $\nabla^2 \mathfrak{A}$ durch Multiplikation von (182a) mit $\mathfrak{A}$ müssen wir beachten, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, in bezug auf ihre Richtungen, nicht konstant sind. Die Rechnung wird deshalb ziemlich kompliziert. Wir kommen schneller zum Ziel, wenn wir $\nabla^2 \mathfrak{A}$ direkt aus (79a) berechnen.

Um z. B. die $\mathfrak{a}$-Komponente von $\nabla^2 \mathfrak{A}$ zu bestimmen, braucht man nur von der $\mathfrak{a}$-Komponente von $\nabla \operatorname{div} \mathfrak{A}$ die $\mathfrak{a}$-Komponente von $\operatorname{rot}^2 \mathfrak{A}$ abzuziehen. Die erstere erhält man, wenn man in (176) statt p den Wert $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ aus (178) einsetzt, und die letztere dadurch,

daß man in (179) A_3 und A_2 durch die Beträge der $\mathfrak{c}$- und $\mathfrak{b}$-Komponenten von rot $\mathfrak{A}$ ersetzt. Wir erhalten deshalb für die $\mathfrak{a}$-Komponente von $\nabla^2 \mathfrak{A}$ den Wert

$$(183) \quad \mathfrak{a}\nabla^2\mathfrak{A} = \frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{MNP}\left(\frac{\partial A_1 NP}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_2 MP}{\partial\beta} + \frac{\partial A_3 MN}{\partial\gamma}\right)\right\} - $$
$$ - \frac{1}{NP}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{P}{MN}\left(\frac{\partial NA_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial MA_1}{\partial\beta}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{\frac{N}{MP}\left(\frac{\partial MA_1}{\partial\gamma} - \frac{\partial PA_3}{\partial\alpha}\right)\right\}\right].$$

Wir ersehen demnach auch aus den obigen Ausführungen, daß man den Operator ∇ als einen besonderen Vektor auffassen kann, welcher die Regeln der Vektorenmultiplikation befolgt, dabei aber noch gewisse differentiale Eigenschaften aufweist. Auch hier müssen wir einen Faktor, welcher vor ∇ steht, als konstant betrachten. So ist das skalare Produkt

$$(184) \quad \mathfrak{A}\nabla = \frac{A_1}{M}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{A_2}{N}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{A_3}{P}\frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

Multiplizieren wir jetzt $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\nabla$, wo

$$(b) \quad \mathfrak{B} = B_1\mathfrak{a} + B_2\mathfrak{b} + B_3\mathfrak{c}$$

ist, so erhalten wir

$$(185) \quad (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = \frac{A_1}{M}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\alpha} + \frac{A_2}{N}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\beta} + \frac{A_3}{P}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\gamma},$$

und dieser Ausdruck ist identisch mit (59). Denn das dortige da fällt in die Richtung von $\mathfrak{A}$ im Punkte P, welchem hier der Punkt O entspricht; demnach ist

$$(c) \quad \frac{d\mathfrak{B}}{da} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{da} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\beta}\frac{d\beta}{da} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{da}.$$

Da nun

$$(d) \quad \begin{gathered} \frac{d\alpha}{da} = \frac{M d\alpha}{M da} = \frac{\cos(\mathfrak{A} d\alpha)\cdot da}{M da} = \frac{A_1}{M|\mathfrak{A}|} \\ \frac{d\beta}{da} = \frac{A_2}{N|\mathfrak{A}|}, \quad \frac{d\gamma}{da} = \frac{A_3}{P|\mathfrak{A}|}, \end{gathered}$$

so folgt durch Einsetzen von (d) in (c) und Multiplizieren mit $|\mathfrak{A}|$ die Identität (185).

35. Beispiele. Infolge Nr. 33 und Nr. 34 ist es leicht, die verschiedenen vektoranalytischen Operationen durch orthogonael

krummlinige Koordinaten darzustellen, sobald uns die Funktionen M, N, P der Koordinaten α, β, γ gegeben sind. Wir wollen hier einige Beispiele anführen.

Sphärische Koordinaten:

$$\text{(a)}\qquad \begin{array}{c} \alpha = \varphi; \quad \beta = \vartheta; \quad \gamma = r \\ M = r; \quad N = r\sin\varphi; \quad P = 1. \end{array}$$

Die Bedeutung dieser Größen wurde schon in Nr. **33** erläutert.

Zylindrische Koordinaten:

$$\text{(b)}\qquad \begin{array}{c} \alpha = r; \quad \beta = \varphi; \quad \gamma = z \\ M = 1; \quad N = r; \quad P = 1. \end{array}$$

Hier bedeutet r die Entfernung eines Punktes von der Z-Achse und φ den Winkel zwischen zwei, durch die Z-Achse gehenden Ebenen, wobei die eine als fest angenommen wird, während in der anderen r liegt. Der Winkel φ wird von der festen Ebene aus gerechnet, positiv im Sinne der Drehung des Uhrzeigers, falls man längs der Z-Achse blickt. φ kann sich zwischen 0 und 2π ändern.

Geradliniges Rechtssystem:

$$\text{(c)}\qquad \begin{array}{c} \alpha = x; \quad \beta = y; \quad \gamma = z \\ M = N = P = 1 \\ \mathfrak{a} = \mathfrak{i}; \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{j}; \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{k}. \end{array}$$

Wie früher in Nr. **33** bemerkt, sind die letzten drei Vektoren konstant. Für dieses Koordinatensystem folgt aus Nr. **34**:

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{186}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{187}$$

$$\operatorname{grad} p = \nabla p = \mathfrak{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{188}$$

$$\operatorname{div}\nabla p = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{189}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \tag{190}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right). \tag{191}$$

Für den Betrag der $\mathfrak{a}$- bzw. $\mathfrak{i}$-Komponente von $\nabla^2\mathfrak{A}$ erhalten wir aus (187), resp. (183)

$$\mathfrak{i}\nabla^2\mathfrak{A} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \tag{192}$$

und ähnliche Ausdrücke für die anderen Komponenten. Ein Vergleich von (187) mit (189) ergibt hierbei, daß bei einem geradlinigen Rechtssystem (192) nichts anderes ist, als $\operatorname{div}\nabla A_1$. Wir könnten auch (192) direkt aus (84) und (189) ableiten unter Berücksichtigung der Konstanz von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Endlich erhalten wir aus (185) wieder für die $\mathfrak{i}$-Komponente

$$\mathfrak{i}(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} \tag{193}$$

und entsprechende Ausdrücke für die anderen Komponenten.

36. Einführung der Krümmungsradien der zu den Vektorlinien orthogonalen Flächen. Wir sahen in Nr. **28**, daß, wenn die Bedingung

$$\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0 \tag{a}$$

erfüllt ist, es möglich ist, eine zu den Vektorlinien orthogonale Flächenschar zu konstruieren. Wir wollen jetzt diese Bedingung als erfüllt betrachten und annehmen, daß diese Flächenschar mit einer Gruppe der in Nr. **33** behandelten orthogonalen Flächen zusammenfällt. Daraus folgt, daß diejenigen Kurven, welche durch den gegenseitigen Schnitt der beiden anderen Gruppen entstehen, stets senkrecht zu der ersten Flächengruppe sein werden und infolgedessen mit den Vektorlinien zusammenfallen müssen. Wir erhalten deshalb, falls $\mathfrak{c}$ mit der Vektorlinie zusammenfällt, aus (a) Nr. **34**

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{c}A_3 \tag{b}$$

und $A_1 = A_2 = 0$; aus (178):

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{1}{MNP}\frac{\partial A_3 MN}{\partial \gamma} \tag{194}$$

und endlich aus (179)

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\frac{1}{NP}\frac{\partial PA_3}{\partial\beta} - \mathfrak{b}\frac{1}{MP}\frac{\partial PA_3}{\partial\alpha}. \tag{195}$$

Aus (b) und (195) folgt unmittelbar (a).

Da aber $Pd\gamma$ infolge Nr. **33** nichts anderes ist als ein Element dl der Vektorlinie, so können wir statt (194) schreiben

$$\text{div}\,\mathfrak{A} = \frac{\partial A_3}{\partial l} + A_3 \frac{\partial MN}{MN\partial l}. \tag{196}$$

Aus Fig. 26 in Nr. **33** ersehen wir, daß das zur Vektorlinie senkrechte Flächenelement gleich sein wird

$$oahb = df = MNd\alpha d\beta.$$

Gehen wir jetzt längs der Vektorlinie um ein Stück dl und legen dort eine zweite zu den Vektorlinien orthogonale Fläche, so erhalten wir für das Flächenelement $cepd = df_1 = MNd\alpha d\beta + \frac{\partial MN}{\partial l} d\alpha d\beta dl.$

Deshalb ist

$$\frac{\partial MN}{MN\partial l} = \frac{df_1 - df}{MNd\alpha d\beta dl} = \frac{df_1 - df}{dv}. \tag{c}$$

Hierbei sind ae, hp usw. als Teile von Vektorlinien aufzufassen.

Man kann aber das Flächenelement df durch die Krümmungsradien r_1 und r_2 von ob und oa darstellen, und zwar ist

$$df = r_1 r_2 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2,$$

wo $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_2$ die entsprechenden unendlich kleinen Winkel bedeuten. Da aber ob und oa in den Normalschnitten von $oahb$ liegen, so sind r_1 und r_2 auch die Krümmungsradien dieses Flächenelements. Für das andere Flächenelement $df_1 = cepd$ können wir annehmen, unter Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung, daß r_1 und r_2 einen gemeinsamen Zuwachs dl erfahren haben, die Winkel $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_2$ aber dieselben geblieben sind. Infolgedessen ist

$$df_1 = (r_1 + dl)(r_2 + dl)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 = df + r_1 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 dl + r_2 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 dl$$

unter Vernachlässigung des mit dl^2 multiplizierten Gliedes. Beachten wir jetzt, daß $dv = r_1 r_2 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 dl$ ist, so erhalten wir aus (c)

$$\frac{\partial MN}{MN\partial l} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Da nun nach einem bekannten Satz der Theorie der krummen Flächen $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ist, wo R_1 und R_2 die Krümmungsradien der beiden Hauptnormalschnitte bedeuten, so folgt

$$\text{div}\,\mathfrak{A} = \frac{\partial A_3}{\partial l} + A_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{197}$$

Ist im speziellen Fall $\mathfrak{A} = \nabla q$, so ist

$$A_3 = \frac{\partial q}{\partial l}$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \nabla^2 q = \frac{\partial^2 q}{\partial l^2} + \frac{\partial q}{\partial l}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{198}$$

Hierbei fällt die zu $\mathfrak{A}$ orthogonale Fläche mit der Niveaufläche von q zusammen.

Kapitel VIII.

Verschiedene Arten von Vektoren.

37. Polare und achsiale Vektoren. Wir haben im vorhergehenden mit Hilfe eines rechtwinkligen geradlinigen Koordinatensystems gewisse analytische Formen angegeben, die uns ermöglichen, einen bestimmten Vektor bzw. Skalar darzustellen. Hierbei müssen wir den physikalischen Standpunkt immer im Auge behalten und beachten, daß wir die Vektoren bzw. Skalare als primäre gegebene Größen auffassen, also unabhängig von der analytischen Darstellungsform. Diese letztere muß so gewählt werden, daß sie stets den richtigen Wert des Vektors bzw. Skalars ergibt. Infolgedessen drängt sich die Frage auf, wie die analytische Form von der Lage bzw. der Art des Koordinatensystems abhängt. Wir wollen jetzt dieser Frage näher treten.

Es ist klar, daß eine reine Translation eines Koordinatensystems keine Änderung in der analytischen Darstellungsform hervorbringen kann; denn wie die Komponenten, so bleiben auch die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ dabei unverändert. Wir haben deshalb nur die Wirkung einer Drehung des Systems um den Koordinatenanfang und die Inversion, d. h. den Richtungswechsel aller drei Achsen, zu untersuchen.

Zwischen Drehung und Inversion wird deshalb unterschieden, weil hier zwei völlig verschiedene Operationen vorliegen. Man kann nie durch Drehung Inversion erzielen. Eine Inversion ist nichts anderes als der Übergang von einem Rechts- zu einem Linkssystem oder umgekehrt. Denn Inversion mit entsprechender Drehung kann nur je zwei Achsen zum Zusammenfallen bringen, während die dritte entgegengesetzte Richtung behalten wird.

Gegeben sei ein Vektor

(a) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3,$$

der ausschließlich durch seine Richtung im Raume und seinen Betrag vollständig charakterisiert ist. Es ist klar, daß wir bei einer beliebigen Drehung des Koordinatensystems, falls die Komponenten A_1, A_2 und A_3 und die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, gegeben sind, immer auf Grund von (a) den Vektor rekonstruieren können, und daß wir hierbei stets eine richtige Bestimmung des Vektors in bezug auf die Lage im Raume und seinen Betrag erhalten müssen. Bezeichnen wir also die entsprechenden Größen bei dem gedrehten Koordinatensystem durch gestrichelte Buchstaben, so werden wir haben

(199) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}'A_1' + \mathfrak{j}'A_2' + \mathfrak{k}'A_3' = \mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3.$$

Anderseits ist bei der Inversion

(b) $$\mathfrak{i}' = -\mathfrak{i};\ \mathfrak{j}' = -\mathfrak{j};\ \mathfrak{k}' = -\mathfrak{k}$$

(200) $$A_1' = -A_1;\ A_2' = -A_2;\ A_3' = -A_3.$$

Hieraus folgt, daß auch bei der Inversion (199) erfüllt bleibt. Einen solchen Vektor, der laut (199) invariant ist in bezug auf seine analytische Darstellungsform, und bei der Inversion den Bedingungen (199) und (200) genügt, nennt man einen polaren Vektor.

Wir wollen jetzt den Vektor

(c) $$\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

oder

(d) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3 = \mathfrak{i}(B_2C_3 - C_2B_3) + \mathfrak{j}(B_3C_1 - C_3B_1) + \\ + \mathfrak{k}(B_1C_2 - C_1B_2)$$

untersuchen unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ polare Vektoren sind. Infolgedessen genügen sie der Gleichung (199), und wir können statt (c) schreiben

(e) $$\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = [(\mathfrak{i}'B_1' + \mathfrak{j}'B_2 + \mathfrak{k}'B_3')(\mathfrak{i}'C_1' + \mathfrak{j}'C_2' + \mathfrak{k}'C_3')].$$

Solange es sich um eine Drehung handelt, werden die Gleichungen (161) stets erfüllt sein, d. h. es wird sein $[\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'] = \mathfrak{k}'$ usw.

Führen wir demnach die Multiplikation in (e) aus, so erhalten wir

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}'A_1' + \mathfrak{j}'A_2' + \mathfrak{k}'A_3', \quad \text{wo}$$

$$\text{(f)} \qquad A_1' = B_2'C_3' - C_2'B_3' \text{ usw.}$$

bedeutet. Der Vektor (c) ist also in bezug auf eine Drehung invariant und genügt der Gleichung (199). Anders wird es bei der Inversion sein. Denn hierbei gehen die Gleichungen (161) über in

$$\text{(g)} \qquad [\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'] = -\mathfrak{k}'; \; [\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'] = -\mathfrak{i}'; \; [\mathfrak{k}'\mathfrak{i}'] = -\mathfrak{j}',$$

und deshalb ergibt die Multiplikation in (e)

$$(201) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3 = -\mathfrak{i}'A_1' - \mathfrak{j}'A_2' - \mathfrak{k}'A_3',$$

wo die A' durch (f) gegeben sind.

Anderseits folgt wegen des polaren Charakters von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus (f), (200) und (d)

$$(202) \quad \begin{aligned} A_1 = B_2'C_3' - C_2'B_3' = B_2C_3 - C_2B_3 = A_1; \\ A_2' = A_2; \; A_3' = A_3. \end{aligned}$$

Hieraus ersehen wir, daß die Komponenten des Vektors $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ bei der Inversion das Zeichen nicht wechseln im Gegensatz zu den Komponenten eines polaren Vektors, so daß wir, um nach der Inversion den richtigen Wert des Vektors $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ auf Grund seiner Komponenten zu bestimmen, gemäß (201) deren Zeichen wechseln müssen.

Einen solchen Vektor, welcher bei der Inversion die Beziehungen (201) und (202) erfüllt, nennt man einen achsialen Vektor. (Siehe auch Nr. 4.)

38. Gewöhnliche und Pseudoskalare. Wir wollen jetzt zu den skalaren Produkten übergehen und zunächst das Produkt $a = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ betrachten und voraussetzen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ polare Vektoren sind. Mit Rücksicht auf das Vorhergehende ist sofort klar, daß dieser Skalar a bei Drehung und bei Inversion invariant ist. Der Skalar a ist ein gewöhnlicher Skalar. Betrachten wir aber den Skalar

$$\text{(h)} \qquad b = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ polare Vektoren bedeuten, so ist aus dem Vorhergehenden einzusehen, daß b invariant ist in bezug auf eine Drehung, daß aber bei der Inversion ein Zeichenwechsel erfolgt. Einen solchen Skalar nennt man einen Pseudoskalar.

39. Allgemeine Sätze. Es ist ohne weiteres folgender Satz klar:

A) Gleichheit kann nur zwischen gleichartigen Vektoren bzw. Skalaren bestehen.

Denn gesetzt, wir hätten die vier Größen, welche den Gleichungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B},\ a = b$$

genügen, analytisch unter Bezugnahme auf ein Koordinatensystem dargestellt, wobei sich $\mathfrak{A}$ und a als invariant erweisen, so muß offenbar die gleiche Eigenschaft von $\mathfrak{B}$ und b gelten. Der Satz A) ist analog der Forderung in der Physik — welche selbstverständlich auch hier erfüllt werden muß —, wonach die Dimensionen beider Seiten einer Gleichung übereinstimmen müssen.

Aus A) folgt, daß die Summe von Vektoren bzw. Skalaren von gleicher Art sein muß wie die einzelnen Summanden und umgekehrt. Bezeichnen wir deshalb durch f die durch (c) **37** ausgedrückte Fläche und durch V das durch (h) **38** bezeichnete Volumen, so wird sein

$$\int_f d\mathfrak{f} = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] \tag{a}$$

$$\int_V dv = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}], \tag{b}$$

woraus wir ersehen, daß $d\mathfrak{f}$ ein achsialer Vektor und dv ein Pseudoskalar ist. Dadurch daß $d\mathfrak{f}$ durch den Umlaufsinn bestimmt wird (vgl. Nr. **4**), also sozusagen als Achse für eine Umdrehung dient, erklärt sich auch die Benennung „achsialer Vektor."

Wir können weiter folgende Sätze hinschreiben:

B) Die Multiplikation bzw. Division eines $\frac{\text{polaren}}{\text{achsialen}}$ Vektors mit einem $\frac{\text{gewöhnlichen}}{\text{Pseudo-}}$ Skalar ergibt einen polaren Vektor.

C) Die Multiplikation bzw. Division eines $\frac{\text{achsialen}}{\text{polaren}}$ Vektors mit einem $\frac{\text{gewöhnlichen}}{\text{Pseudo-}}$ Skalar ergibt einen achsialen Vektor.

Hieraus folgt im Hinblick auf die Fundamentalformel

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}. \tag{c}$$

D) Das Vektorprodukt eines polaren und achsialen Vektors ist ein polarer Vektor.

Daß das Vektorprodukt zweier polarer Vektoren einen achsialen Vektor ergibt, wissen wir schon aus Nr. **33**. Was aber das Vektorprodukt zweier achsialer Vektoren anbetrifft, so ergibt die rechte Seite von (c), wenn $\mathfrak{A}$ achsial ist und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ polar, einen achsialen Vektor. Wir erhalten deshalb:

E) Das Vektorprodukt zweier $\frac{\text{achsialer}}{\text{polarer}}$ Vektoren ist ein achsialer Vektor.

Die Sätze A) bis E) liefern, mit Berücksichtigung von (a) und (b), die Möglichkeit, die Art des Vektors bzw. Skalars bei allen Transformationen zu bestimmen. Vorausgesetzt wird die Invarianz in bezug auf eine Drehung. Für die elementaren vektoranalytischen Transformationen ist diese Invarianz aus Nr. **37** sofort klar. Was die Operationen ∇, div und rot anbetrifft, so wird deren Invarianz in bezug auf eine Drehung in der gewöhnlichen Analysis bewiesen. Wir möchten dennoch hier, der Vollständigkeit halber, diese Invarianz bei einer Drehung um die Z-Achse nachweisen.

Bezeichnen wir durch φ den Winkel zwischen der ursprünglichen X-Achse und ihrer neuen Lage, so erhalten wir, falls wir die der neuen Lage entsprechenden Größen durch gestrichelte Buchstaben bezeichnen:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \; y = y' \cos\varphi + x' \sin\varphi$$

$$\text{(d)} \qquad \mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \cos\varphi + \mathfrak{j} \sin\varphi, \; \mathfrak{j}' = \mathfrak{j} \cos\varphi - \mathfrak{i} \sin\varphi$$

$$A_1' = A_1 \cos\varphi + A_2 \sin\varphi, \; A_2' = A_2 \cos\varphi - A_1 \sin\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial p}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial p}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\mathfrak{i}'\frac{\partial p}{\partial x'} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cos^2\varphi + \frac{\partial p}{\partial y}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial y}\sin^2\varphi\right)$$

und analog

$$\mathfrak{j}'\frac{\partial p}{\partial y'} = \mathfrak{j}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\cos^2\varphi - \frac{\partial p}{\partial x}\sin\varphi\cos\varphi\right) - \mathfrak{i}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{\partial p}{\partial x}\sin^2\varphi\right).$$

Wir erhalten demnach

$$\text{(e)} \qquad \mathfrak{i}'\frac{\partial p}{\partial x'} + \mathfrak{j}'\frac{\partial p}{\partial y'} = \mathfrak{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial p}{\partial y},$$

wodurch die Invarianz von ∇ in bezug auf eine Drehung um die Z-Achse bewiesen ist. Ganz analog können wir diese Invarianz auch für div und rot beweisen.

Wir wollen jetzt das Verhalten von ∇, div und rot in bezug auf die Inversion untersuchen und zwar, wie wir schon bemerkt haben, mit Hilfe der Sätze A) bis E). Untersuchen wir z. B. ∇p, unter der Voraussetzung, daß p ein gewöhnlicher Skalar ist. Die Anwendung der obigen Regeln ergibt in Verbindung mit (44) folgendes: $d\mathfrak{f}$ ist ein achsialer Vektor; multipliziert mit einem gewöhnlichen Skalar p ergibt sich ein achsialer Vektor, und endlich dividiert durch ein Volumen, also durch einen Pseudoskalar, ergibt sich ein polarer Vektor.

Ganz analog können wir (45) und (46) untersuchen und kommen dadurch zu folgenden weiteren Sätzen:

F) Der Gradient eines $\frac{\text{gewöhnlichen}}{\text{Pseudo-}}$ Skalars ist ein $\frac{\text{polarer}}{\text{achsialer}}$ Vektor.

G) Die Divergenz eines $\frac{\text{polaren}}{\text{achsialen}}$ Vektors ist ein $\frac{\text{gewöhnlicher}}{\text{Pseudo-}}$ Skalar und

H) Der Rotor eines $\frac{\text{polaren}}{\text{achsialen}}$ Vektors ist ein $\frac{\text{achsialer}}{\text{polarer}}$ Vektor.

Wir überlassen es dem Leser, die anderen Operationen mit Hilfe obiger Regeln zu untersuchen. Dieselben werden invariant in bezug auf eine Drehung sein, denn sie bestehen ja nur aus mehrfacher Anwendung von ∇, div und rot.

40. Tensoren. Wir denken uns vom Aufpunkt den Einheitsvektor $\mathfrak{r}_0$ in einer beliebigen, aber variablen Lage gezogen. Nehmen wir jetzt an, ein Vektor $\mathfrak{A}$ sei mit $\mathfrak{r}_0$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}\mathfrak{r}_0]$$

verknüpft, wobei der Aufpunkt im Felde des Vektors $\mathfrak{B}$ gedacht ist. Dann ist $\mathfrak{A}$ für jede Lage von $\mathfrak{r}_0$, bei gegebenem $\mathfrak{B}$ vollständig

bestimmt. Selbstverständlich ändert sich $\mathfrak{A}$ mit der Lage des Aufpunktes im Felde von $\mathfrak{B}$. Eine solche Änderung wollen wir aber nicht in Betracht ziehen, sondern annehmen, der Aufpunkt läge im Felde von $\mathfrak{B}$ fest.

Allgemein können wir z. B. $\mathfrak{A}$ als eine Funktion von $\mathfrak{r}_0$ und irgend welcher anderen Vektoren betrachten, also

$$\mathfrak{A} = \varphi(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \cdots) \tag{203}$$

oder kurz

$$\mathfrak{A} = \varphi(\mathfrak{r}_0) \tag{203a}$$

(vgl. z. B. die Vektoren $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}$ in Nr. 16).

Wir wollen die Abhängigkeit des Vektors $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{r}_0$ untersuchen und zwar unter folgender einschränkender Bedingung:

Angenommen $\mathfrak{r}_0$ gehe in eine andere Lage $\mathfrak{r}_0'$ über, so daß $\mathfrak{A}' = \varphi(\mathfrak{r}_0')$. Dann werden wir uns auf solche Vektoren beschränken, für welche stets die Beziehung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{A}'\mathfrak{r}_0 \tag{204}$$

erfüllt ist.

Wir denken uns jetzt ein Rechtssystem mit dem Koordinatenanfang im Aufpunkt und bezeichnen durch $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ diejenigen Werte von $\mathfrak{A}$, die wir aus (203a) erhalten, falls $\mathfrak{r}_0$ sukzessive mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ zusammenfällt. Außerdem setzen wir

$$\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k}. \tag{a}$$

Es sei sofort darauf hingewiesen und muß im folgenden stets beachtet werden, daß $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ bei einem bestimmten Rechtssystem unabhängig von der Richtung von $\mathfrak{r}_0$ sind, während A_1, A_2, A_3 von dieser Richtung abhängen.

Machen wir jetzt $\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{i}$, so ist $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_x$ und aus (204) und (a) folgt $\mathfrak{A}\mathfrak{i} = A_1 = \mathfrak{r}_0\mathfrak{A}_x$ und entsprechend $A_2 = \mathfrak{r}_0\mathfrak{A}_y$ und $A_3 = \mathfrak{r}_0\mathfrak{A}_z$.

Demnach ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{r}_0\mathfrak{A}_x + \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{r}_0\mathfrak{A}_y + \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}_0\mathfrak{A}_z. \tag{205}$$

Wegen der obigen Bemerkung bezüglich $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, erhalten wir für eine andere Richtung $\mathfrak{r}_0'$ von $\mathfrak{r}_0$

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{r}_0'\mathfrak{A}_x + \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{r}_0'\mathfrak{A}_y + \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}_0'\mathfrak{A}_z.$$

Hieraus und aus (204) folgt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{A}'\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{r}_0'\mathfrak{A}_x + \cdots = \mathfrak{r}_0'\{\mathfrak{r}_0\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{A}_x + \cdots\}.$$

Da dies für ein beliebiges $\mathfrak{r}_0'$ gültig ist, so erhalten wir in

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{A}_x + \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{A}_y + \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{A}_z \tag{206}$$

einen zu (205) symmetrischen Ausdruck für $\mathfrak{A}$.

Nun ist

$$[\mathfrak{r}_0[\mathfrak{i}\mathfrak{A}_x]] = \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{r}_0\mathfrak{A}_x - \mathfrak{A}_x\cdot\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 \text{ usw.},$$

daher fließt aus (205) und (206)

$$[\mathfrak{r}_0([\mathfrak{i}\mathfrak{A}_x] + [\mathfrak{j}\mathfrak{A}_y] + [\mathfrak{k}\mathfrak{A}_z])] = 0$$

und, da dies für beliebige $\mathfrak{r}_0$ gilt,

$$[\mathfrak{A}_x\mathfrak{i}] + [\mathfrak{A}_y\mathfrak{j}] + [\mathfrak{A}_z\mathfrak{k}] = 0. \tag{207}$$

Wir denken uns jetzt die Lage von $\mathfrak{r}_0$ ein wenig variiert um den Betrag $\delta\mathfrak{r}_0$ und setzen

$$\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0 + \delta\mathfrak{r}_0 \text{ entsprechend } \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}. \tag{b}$$

Hieraus und aus (204) ergibt sich

$$\mathfrak{A}\delta\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\delta\mathfrak{A}. \tag{208}$$

Nehmen wir anderseits die Variation des Produkts $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0$, so wird

$$\delta(\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0) = \mathfrak{r}_0\delta\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\delta\mathfrak{r}_0 \tag{c}$$

oder infolge (208)

$$\delta(\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0) = 2\mathfrak{A}\delta\mathfrak{r}_0 = 2\mathfrak{r}_0\delta\mathfrak{A}. \tag{209}$$

Hierbei müssen wir beachten, daß $\delta\mathfrak{r}_0$, da doch $\mathfrak{r}_0$ einen Einheitsvektor bedeutet, stets senkrecht zu $\mathfrak{r}_0$ ist, sonst aber beliebig gerichtet sein kann.

Aus (204) folgt demnach die Gültigkeit von (209) bzw. (208) für alle zusammengehörigen Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{r}_0$. Wir wollen jetzt das Umgekehrte beweisen, d. h. ist (208) bzw. (209) für alle zusammengehörigen Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{r}_0$ gültig, so besteht auch die Beziehung (204).

Durch Variation von (208) erhalten wir

$$\mathfrak{A}\delta^2\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\delta^2\mathfrak{A}. \tag{d}$$

Wir wollen jetzt schreiben

$$\text{(e)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}' + \delta\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}' \\ \mathfrak{r}_0'' = \mathfrak{r}_0' + \delta\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0 + \delta\mathfrak{r}_0 + \delta\mathfrak{r}'_0, \end{cases}$$

d. h. $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{r}_0''$ sind Größen, die sich von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{r}_0'$ nur um die Variationen $\delta\mathfrak{A}'$ und $\delta\mathfrak{r}_0'$ unterscheiden. Aus (b) und (e) folgt

$$\text{(f)} \qquad \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} + 2\delta\mathfrak{A} + \delta^2\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{r}_0'' = \mathfrak{r}_0 + 2\delta\mathfrak{r}_0 + \delta^2\mathfrak{r}_0.$$

Multiplizieren wir jetzt (208) mit 2, addieren dazu (d) und fügen noch zu beiden Seiten $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0$ hinzu, so erhalten wir aus (f)

$$\text{(g)} \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{r}_0'' = \mathfrak{A}''\mathfrak{r}_0.$$

Ganz analog können wir, wenn wir noch die Gleichung

$$\text{(h)} \qquad \mathfrak{A}'\delta\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0'\delta\mathfrak{A}'$$

beachten, welche laut Annahme gelten muß, beweisen, daß

$$\text{(i)} \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{r}''' = \mathfrak{A}'''\mathfrak{r}_0,$$

wo

$$\text{(k)} \qquad \mathfrak{A}''' = \mathfrak{A}'' + \delta\mathfrak{A}'', \; \mathfrak{r}_0''' = \mathfrak{r}_0'' + \delta\mathfrak{r}_0''$$

bedeuten. Durch solches Verfahren gelangen wir sukzessive zu mehr und mehr abstehenden Werten von $\mathfrak{r}_0$ bzw. $\mathfrak{A}$. Da hierbei ähnliche Gleichungen wie (g) oder (i) resultieren, so ist damit unsere Behauptung bewiesen.

Einen solchen Vektor, welcher der Beziehung (204) oder (208) oder (209) genügt, nennt man einen Tensor[1]). Es ist leicht zu ersehen, daß ein Tensor auch definiert wird durch eines der drei Paare von Gleichungen: (205) und (206), (205) und (207), (206) und (207), denn aus jedem Paar folgt (204).[2])

41. Dyaden. Wir wollen jetzt zwei Vektoren durch das Zeichen ; trennen, z. B. $\mathfrak{A};\mathfrak{B}$. Dann bedeutet diese Schreibweise, daß diese Vektoren vorläufig ohne Einfluß aufeinander sein sollen, d. h. weder skalar noch vektoriell zu multiplizieren sind. Bezeichnen wir einen solchen Ausdruck durch ψ:

$$\text{(a)} \qquad \psi = \mathfrak{A};\mathfrak{B},$$

1) Die Bezeichnung „Tensor“ wurde früher von manchen Autoren für den Betrag eines Vektors gebraucht.

2) Es sei hier noch bemerkt, daß die drei Größen $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ als Tensortripel bezeichnet werden.

so sei

$$\mathfrak{r}\psi = \mathfrak{r}\mathfrak{A};\, \mathfrak{B} \qquad \psi\mathfrak{r} = \mathfrak{A};\, \mathfrak{B}\mathfrak{r}.$$

Multipliziert man also ψ skalar mit $\mathfrak{r}$ und setzt $\mathfrak{r}$ vor ψ, so soll diese Operation bedeuten, daß man $\mathfrak{A}$ skalar mit $\mathfrak{r}$ multipliziert. Setzt man anderseits $\mathfrak{r}$ hinter ψ, so soll dies eine skalare Multiplikation von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{r}$ bedeuten. Ist diese Multiplikation einmal ausgeführt, so braucht man das Zeichen ; nicht mehr, und es kann auf Grund von Nr. 5 durch einen Punkt ersetzt werden.

Es ist deshalb

(b) $$\mathfrak{r}\psi = \mathfrak{r}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$$

(c) $$\psi\mathfrak{r} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{r}.$$

Bilden wir jetzt den Ausdruck

(210) $$\Phi = \mathfrak{A}_x;\, \mathfrak{i} + \mathfrak{A}_y;\, \mathfrak{j} + \mathfrak{A}_z;\, \mathfrak{k},$$

so fließt aus (c) und (206)

(211) $$\mathfrak{A} = \Phi\mathfrak{r}_0.$$

Den Ausdruck Φ nennt man eine Dyade. Da wir aber für $\mathfrak{A}$ die Bedingung (204) eingeführt haben, so folgt aus (205) und (206)

(212) $$\mathfrak{r}_0\Phi = \Phi\mathfrak{r}_0.$$

Eine solche Dyade Φ, welche der Bedingung (212) genügt, nennt man eine symmetrische oder autokonjugierte Dyade, während allgemein (210) eine komplette Dyade vorstellt. Die Größen, welche in (210) vor dem Zeichen ; stehen, nennt man Antezedenten und diejenigen, die nach ; stehen, Konsequenten. Demnach sind in (211) die Konsequenten der Dyade skalar mit $\mathfrak{r}_0$ multipliziert und die Antezedenten sind noch frei. Es ist deshalb

(213) $$\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\Phi\mathfrak{r}_0.$$

Da die Dyade selbst nicht von $\mathfrak{r}_0$ abhängt, stellt sich die Bedingung (204) folgendermaßen dar

(d) $$\mathfrak{r}_0{}'\Phi\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\Phi\mathfrak{r}_0{}'.$$

Wir wollen uns hier nicht mit der allgemeinen Theorie der Dyaden beschäftigen, sondern uns nur auf die symmetrischen

Dyaden bzw. Tensoren beschränken. Wir haben das obige nur zur Orientierung erwähnt und möchten noch bemerken, daß viele von den weiter unten bewiesenen Eigenschaften der Tensoren bzw. der symmetrischen Dyaden auch für die kompletten Dyaden gültig sind.

42. Das Tensorellipsoid. Da wir doch schließlich mit „physikalischen" Vektoren zu tun haben, so wollen wir annehmen, daß der Tensor $\mathfrak{A}$ in Nr. **40** mit der Lage von $\mathfrak{r}_0$ stetig variiert und endlich bleibt. Wir müssen deshalb folgern, daß für eine bestimmte Lage von $\mathfrak{r}_0$ das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0$ ein Maximum bzw. Minimum erreicht unabhängig von der Richtung von $\delta\mathfrak{r}_0$. Für diese Lage von $\mathfrak{r}_0$ muß aber die Variation von $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0$ verschwinden, und wir erhalten deshalb aus (209)

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{A}\delta\mathfrak{r}_0 = 0$$

d. h. für diese Richtung von $\mathfrak{r}_0$ liegt $\mathfrak{A}$ parallel zu $\mathfrak{r}_0$.

Wir legen in diese Richtung die Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Dann ist $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{A} = A_3\mathfrak{k}$. Es möge $\mathfrak{r}_0'$ in der YX-Ebene liegen. Dann folgt aus (204):

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{A}'\mathfrak{k} = A_3\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0' = 0,$$

d. h. $\mathfrak{A}'$ ist ebenfalls senkrecht zur Z-Achse und liegt in der YX-Ebene.

Wir drehen jetzt $\mathfrak{r}_0'$ um die Z-Achse, ohne aus der YX-Ebene herauszugehen. Ist hierbei $\mathfrak{A}'\mathfrak{r}_0'$ ständig konstant, so folgt aus (209), daß $\mathfrak{A}'$ immer parallel zu $\mathfrak{r}_0'$ bleibt, und aus (204), daß es auch dem Betrage nach konstant ist. Im allgemeinen Fall, wo $\mathfrak{A}'\mathfrak{r}_0'$ bei der Drehung von $\mathfrak{r}_0'$ nicht konstant bleibt, müssen wir folgendes berücksichtigen. Aus (204) ergibt sich die wichtige Eigenschaft eines Tensors, daß beim Ersetzen von $\mathfrak{r}_0$ durch $-\mathfrak{r}_0$ auch $\mathfrak{A}$ sein Zeichen wechselt. Es folgt hieraus, daß das Produkt $\mathfrak{A}'\mathfrak{r}_0'$ bei einer Drehung von $\mathfrak{r}_0'$ um 180^0 denselben Wert annehmen muß. Da wir aber angenommen haben, $\mathfrak{A}'\mathfrak{r}_0'$ sei nicht konstant, so muß es bei einer Drehung von $\mathfrak{r}_0'$ um 180^0 durch ein Maximum, resp. Minimum gehen. Wir nehmen das erstere an. Drehen wir jetzt $\mathfrak{r}_0'$ von diesem Maximum um 180^0, so muß $\mathfrak{A}'\mathfrak{r}_0'$ unbedingt durch ein Minimum gehen. Da aber $\mathfrak{A}'$ ständig in der YX-Ebene liegt, so folgt aus (209) daß bei diesem Maximum und Minimum $\mathfrak{A}'$ parallel zu $\mathfrak{r}_0'$ sein wird, und aus

(204) folgt weiter, analog wie (b), daß diese beiden Lagen um 90^0 gegeneinander verschoben sind.

Aus diesen Ausführungen geht hervor, daß es im allgemeinen drei zueinander senkrechte Richtungen von $\mathfrak{r}_0$ gibt, für welche der Tensor $\mathfrak{A}$ parallel zu $\mathfrak{r}_0$ ist. Bezeichnen wir jetzt die Grundvektoren entlang diesen Richtungen durch $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{k}'$, so erhalten wir deshalb aus (206)

(c) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}'\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{A}_x + \mathfrak{j}'\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{A}_y + \mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{A}_z.$$

Für diese Richtungen der Achsen können wir aber setzen

(d) $$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{i}'a_1, \quad \mathfrak{A}_y = \mathfrak{j}'a_2, \quad \mathfrak{A}_z = \mathfrak{k}'a_3,$$

wo a_1, a_2, a_3 gewisse Konstanten bedeuten. Statt (c) ergibt sich deshalb

(214) $$\mathfrak{A} = a_1\mathfrak{i}' \cdot \mathfrak{i}'\mathfrak{r}_0 + a_2\mathfrak{j}' \cdot \mathfrak{j}'\mathfrak{r}_0 + a_3\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0$$

oder mit Hilfe der Dyade

(215) $$\Phi = a_1\mathfrak{i}' ; \mathfrak{i}' + a_2\mathfrak{j}' ; \mathfrak{j}' + a_3\mathfrak{k}' ; \mathfrak{k}',$$

kürzer so:

(216) $$\mathfrak{A} = \Phi\mathfrak{r}_0.$$

Aus (215) ist sofort klar, daß

$$\Phi\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\Phi$$

ist, was der Bedingung für eine symmetrische Dyade entspricht. Die hier angenommenen Achsen nennt man Hauptachsen des Tensors. Beziehen wir (a) Nr. **40** auch auf diese Hauptachsen und vergleichen mit (214), so liefert uns eine skalare Multiplikation z. B. mit $\mathfrak{i}'$:

$$A_1 = a_1 \cdot \mathfrak{i}'\mathfrak{r}_0 \text{ oder } \mathfrak{i}'\mathfrak{r}_0 = \frac{A_1}{a_1} \text{ usw.}$$

Da aber

$$(\mathfrak{i}'\mathfrak{r}_0)^2 + (\mathfrak{j}'\mathfrak{r}_0)^2 + (\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0)^2 = 1$$

ist, so erhalten wir

(217) $$\frac{A_1^2}{a_1^2} + \frac{A_2^2}{a_2^2} + \frac{A_3^2}{a_3^2} = 1$$

d. h. der Endpunkt des Tensors $\mathfrak{A}$ bleibt, bei der Bewegung von $\mathfrak{r}_0$, ständig auf der Oberfläche eines Ellipsoids, welches wir Tensor-

ellipsoid nennen wollen und dessen Halbachsen durch a_1, a_2 und a_3 gegeben sind. Diese Größen wollen wir die Hauptwerte des Tensors nennen.

43. Koordinatentransformation. Wir haben in (214) gezeigt, wie ein Tensor durch seine Hauptwerte ausgedrückt werden kann. Die linke Seite von (214) kann man sich dargestellt denken durch (a) Nr. 40, (205) oder (206), also durch ein beliebig gelagertes Koordinatensystem $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit demselben Koordinatenanfang. Es ist manchmal notwendig, den Übergang von dem System $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ zu dem System $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ auszuführen oder umgekehrt. Wir wollen diesen Übergang hier ausführen.

Wir haben allgemein

$$(218) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_x = \mathfrak{i} X_x + \mathfrak{j} Y_x + \mathfrak{k} Z_x \\ \mathfrak{X}_y = \mathfrak{i} X_y + \mathfrak{j} Y_y + \mathfrak{k} Z_y \\ \mathfrak{X}_z = \mathfrak{i} X_z + \mathfrak{i} Y_z + \mathfrak{k} Z_z. \end{cases}$$

Für die Hauptachsen $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ verschwinden alle Größen in (218) außer X_x, Y_y, Z_z, welche dann in die Hauptwerte a_1, a_2, a_3 übergehen.

Aus (207) und (218) folgt

$$(219) \qquad X_y = Y_x; \quad X_z = Z_x; \quad Y_z = Z_y.$$

Mithin sind zur Bestimmung eines Tensors sechs Größen notwendig, und zwar

$$(a) \qquad X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad X_y, \quad Y_z, \quad Z_x.$$

Außerdem müssen noch drei Größen gegeben sein, welche von der Lage des Aufpunktes abhängen. Hiervon wollen wir, wie oben schon erwähnt, absehen und uns nur mit den Größen (a) beschäftigen. Sind anderseits die Hauptwerte gegeben, so gehört zur Bestimmung des Tensors noch die Angabe der Lagen der Hauptachsen. Also auch hierbei sind sechs Größen notwendig.

Die Beziehungen zwischen den Hauptwerten und (a) erhält man folgendermaßen.

Aus (214) folgt

$$(b) \qquad \mathfrak{X}\mathfrak{r}_0 = (\mathfrak{i}'\mathfrak{r}_0)^2 a_1 + (\mathfrak{j}'\mathfrak{r}_0)^2 a_2 + (\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0)^2 a_3.$$

Wir denken uns jetzt die linke Seite von (b) mit Hilfe von (205) dargestellt und lassen $\mathfrak{r}_0$ mit $\mathfrak{i}$ zusammenfallen, dann ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{A}_x \mathfrak{i}$$

oder infolge (218) und (b)

$$(220) \qquad \mathfrak{A}_x \mathfrak{i} = X_x = (\mathfrak{i}'\mathfrak{i})^2 a_1 + (\mathfrak{j}'\mathfrak{i})^2 a_2 + (\mathfrak{k}'\mathfrak{i})^2 a_3$$

oder kurz

$$(220\text{a}) \qquad X_x = \varphi(\mathfrak{i}).$$

Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für Y_y und Z_z, so daß

$$(221) \qquad Y_y = \varphi(\mathfrak{j}); \quad Z_z = \varphi(\mathfrak{k}),$$

d. h. Y_y und Z_z bestimmen sich ebenfalls durch (220), nur daß $\mathfrak{j}$ bzw. $\mathfrak{k}$ an Stelle von $\mathfrak{i}$ treten. Die Kosinusse $\mathfrak{i}'\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}'\mathfrak{j}$ usw. müssen uns bekannt sein, denn sie geben die Lagen der Hauptachsen $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ zu den willkürlichen Achsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ an.

Lassen wir jetzt in (214) $\mathfrak{r}_0$ mit $\mathfrak{i}$ zusammenfallen, so erhalten wir auf der linken Seite $\mathfrak{A}_x$. Multiplizieren wir beiderseits mit $\mathfrak{j}$, so folgt nach (218) und (219)

$$(222) \quad \mathfrak{A}_x \mathfrak{j} = Y_x = X_y = \mathfrak{i}'\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}'\mathfrak{j}\, a_1 + \mathfrak{j}'\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j}'\mathfrak{j}\, a_2 + \mathfrak{k}'\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k}'\mathfrak{j}\, a_3$$

oder in leichtverständlicher Weise

$$(223) \qquad \begin{cases} Y_x = X_y = \mu(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) \\ X_z = Z_x = \mu(\mathfrak{i}, \mathfrak{k}) \\ Z_y = Y_z = \mu(\mathfrak{j}, \mathfrak{k}). \end{cases}$$

Addieren wir (220) und (221) und berücksichtigen, daß

$$(\mathfrak{i}'\mathfrak{i})^2 + (\mathfrak{i}'\mathfrak{j})^2 + (\mathfrak{i}'\mathfrak{k})^2 = 1 \quad \text{usw.}$$

ist, so erhalten wir

$$(224) \qquad J = X_x + Y_y + Z_z = a_1 + a_2 + a_3,$$

d. h. J ist eine Invariante in bezug auf die Lage des Koordinatensystems, also eine spezifische Konstante des Tensors, die sich nur mit der Lage des Aufpunktes im Raume ändert.

44. Weitere Eigenschaften eines Tensors. Wir wollen hier noch einige weitere Eigenschaften eines Tensors untersuchen, die uns bei der Anwendung auf die Kristalloptik von Wichtigkeit sein werden.

Da wir hier nur ein Koordinatensystem benutzen wollen, das mit den Hauptachsen zusammenfällt, so können wir die Striche in (214) weglassen und erhalten statt dieser Gleichung

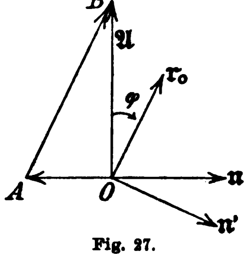


Fig. 27.

(225) $\mathfrak{A} = a_1 \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 + a_2 \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 + a_3 \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0,$

wo a_1, a_2, a_3 die Hauptwerte bedeuten.

Wir führen jetzt zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ ein, beide vom Koordinatenanfang gezogen gedacht. Diese Vektoren sollen in der Ebene von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{r}_0$ liegen, und außerdem soll $\mathfrak{n}$ senkrecht zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{n}'$ senkrecht zu $\mathfrak{r}_0$ sein (Fig. 27). Eine solche Ebene wollen wir eine Hauptebene nennen. Demnach ist die Zeichenebene der Fig. 27 eine Hauptebene.

Aus den Bedingungen für $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ folgt

(226) $$\mathfrak{A}\mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{r}_0\mathfrak{n}' = 0.$$

Wir zerlegen jetzt $\mathfrak{A}$ in zwei Vektoren: $OA = s\mathfrak{n}$, parallel $\mathfrak{n}$, und $AB = p\mathfrak{r}_0$, parallel $\mathfrak{r}_0$ (Fig. 27), und erhalten dann

$$\mathfrak{A} = p\mathfrak{r}_0 + s\mathfrak{n}.$$

Ganz analog können wir auch $\mathfrak{r}_0$ zerlegen

$$\mathfrak{r}_0 = h\mathfrak{A} + l\mathfrak{n}'.$$

Multiplizieren wir diese beiden Gleichungen skalar mit $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$, so fließt aus (226):

$$0 = p\mathfrak{r}_0\mathfrak{n} + s$$
$$0 = h\mathfrak{A}\mathfrak{n}' + l.$$

Hieraus lassen sich l und s bestimmen, und wir können schreiben

(227) $$\mathfrak{A} = p(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n})$$

(228) $$\mathfrak{r}_0 = h(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{n}' \cdot \mathfrak{n}').$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{r}_0$ durch φ, positiv gerechnet von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{r}_0$ (Fig. 27), und den Betrag von $\mathfrak{A}$ durch A, so liefert (227)

(229) $$\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0 = p(1 - (\mathfrak{r}_0\mathfrak{n})^2) = p\cos^2\varphi,$$

und wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0 = A \cos\varphi$ ergibt sich

(230) $$A = p\cos\varphi.$$

Aus (228) und (226) folgt weiter

(a) $$1 = h\,\mathfrak{A}\mathfrak{r}_0$$

und hieraus

(231) $$1 = ph\cos^2\varphi.$$

Wir nehmen jetzt irgendeine Lage für $\mathfrak{r}_0$ an. Dadurch sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}'$ und die Lage der Hauptebene bestimmt. Kehren wir das Zeichen von $\mathfrak{r}_0$ um, so wird dies auch $\mathfrak{A}$ tun. Demnach liegen in einer Hauptebene zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{r}_0$.

Wir halten jetzt diese Lage von $\mathfrak{n}$ fest und untersuchen, ob es nicht bei dieser Lage von $\mathfrak{n}$ noch andere Hauptebenen gibt. Dasselbe wollen wir auch für eine feste Lage von $\mathfrak{n}'$ tun und beide Fälle parallel behandeln.

($\mathfrak{n}$ = fest). Dann erhalten wir für eine andere Hauptebene

(b) $$\mathfrak{A}' = p'(\mathfrak{r}_0' - \mathfrak{r}_0'\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}).$$

Hieraus und aus (204) und (227) folgt

(c) $$(p - p')(\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_0' - \mathfrak{r}_0'\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0) = 0.$$

($\mathfrak{n}'$ = fest). Wir erhalten dann ganz analog

(d) $$(h - h')(\mathfrak{A}\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}\mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{n}'\mathfrak{A}') = 0.$$

Angenommen, es sei

(e) $$p \neq p', \quad h \neq h'.$$

Dann folgt aus (c), da $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = pp'(\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_0' - \mathfrak{r}_0'\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0)$ ist:

(232) $$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = 0$$

und aus (d), da $\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_0' = hh'(\mathfrak{A}\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}\mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{n}'\mathfrak{A}')$ ist:

(233) $$\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_0' = 0.$$

Hieraus schließen wir, daß, falls die Ungleichungen (e) erfüllt sind, es bei festgehaltenem $\mathfrak{n}$ nur zwei Hauptebenen gibt, die zueinander senkrecht stehen, und analog bei festgehaltenem $\mathfrak{n}'$. Dementsprechend erhalten wir auch je zwei Werte für p und h.

Lassen wir jetzt $\mathfrak{r}_0$ mit der Z-Achse zusammenfallen, dann liefert (225):

$$(\mathrm{f}_1) \qquad \mathfrak{A} = a_3 \mathfrak{k}.$$

Da also in diesem Fall $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{r}_0$ in eine Richtung fallen, wird

$$(\mathrm{f}_2) \qquad \cos\varphi = 1,$$

und es muß auch $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$ sein und in die XY-Ebene zu liegen kommen. Deshalb folgt aus (227) und (231)

$$(\mathrm{f}_3) \qquad p = a_3, \quad h = \frac{1}{p} = \frac{1}{a_3}.$$

Dreht man $\mathfrak{n}$ um die Z-Achse, so ändern sich die Ausdrücke (f) nicht. Analoge Resultate ergeben sich, falls $\mathfrak{r}_0$ bzw. $\mathfrak{A}$ mit einer der anderen Achsen zusammenfällt.

Ist außerdem $\mathfrak{n} = \mathfrak{i} = \mathfrak{n}'$, d. h. ist die eine Hauptebene die XZ-Ebene, so wird, wie leicht einzusehen, die XY-Ebene die zweite Hauptebene sein, und wir erhalten hierfür

$$(234) \qquad \begin{cases} \mathfrak{n} = \mathfrak{i} = \mathfrak{n}' \\ p_1 = a_3; \quad p_2 = a_2 \\ h_1 = \dfrac{1}{a_3}; \quad h_2 = \dfrac{1}{a_2}. \end{cases}$$

Analoge Werte finden wir, falls $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$ ist und mit einer der anderen Achsen zusammenfällt. Es werden hierbei demnach die Koordinatenebenen je paarweise die Hauptebenen von $\mathfrak{A}$ sein.

Wir wollen jetzt die Werte von p und h für eine beliebige Richtung von $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ bestimmen. Zu dem Zweck setzen wir links in (227) statt $\mathfrak{A}$ den Ausdruck (225). Die skalare Multiplikation der so erhaltenen Gleichung, z. B. mit $\mathfrak{i}$, liefert $a_1 \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 = p(\mathfrak{r}_0\mathfrak{i} - \mathfrak{r}_0\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}\mathfrak{i})$ oder:

$$(235) \qquad \begin{cases} \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 = p\,\mathfrak{r}_0\mathfrak{n}\,\dfrac{\mathfrak{i}\mathfrak{n}}{p - a_1} \\ \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 = p\,\mathfrak{r}_0\mathfrak{n}\,\dfrac{\mathfrak{j}\mathfrak{n}}{p - a_2} \\ \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 = p\,\mathfrak{r}_0\mathfrak{n}\,\dfrac{\mathfrak{k}\mathfrak{n}}{p - a_3}. \end{cases}$$

Aus (228) und (225) erhalten wir ganz analog

$$(236)\qquad \begin{cases} \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 = h\,\mathfrak{A}\mathfrak{n}'\,\dfrac{\mathfrak{i}\mathfrak{n}'}{ha_1 - 1} \\ \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 = h\,\mathfrak{A}\mathfrak{n}'\,\dfrac{\mathfrak{j}\mathfrak{n}'}{ha_2 - 1} \\ \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 = h\,\mathfrak{A}\mathfrak{n}'\,\dfrac{\mathfrak{k}\mathfrak{n}'}{ha_3 - 1}. \end{cases}$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen (235) sukzessive mit $\mathfrak{i}a_1$, $\mathfrak{j}a_2$, $\mathfrak{k}a_3$ und addieren, so ergibt ein Vergleich mit (225)

$$(237)\qquad \mathfrak{A} = p\mathfrak{r}_0\mathfrak{n}\left\{\frac{\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}\mathfrak{n}\,a_1}{p-a_1} + \frac{\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}\mathfrak{n}\,a_2}{p-a_2} + \frac{\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{n}\,a_3}{p-a_3}\right\}.$$

Ganz analog folgt aus (236) und der Beziehung

$$(g)\qquad \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{k}$$

$$(238)\qquad \mathfrak{r}_0 = h\,\mathfrak{A}\mathfrak{n}'\left\{\frac{\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}\mathfrak{n}'}{ha_1-1} + \frac{\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}\mathfrak{n}'}{ha_2-1} + \frac{\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{n}'}{ha_3-1}\right\}.$$

Aus (237) und (226) erhalten wir, falls $\mathfrak{r}_0\mathfrak{n} \neq 0$ ist,

$$(239)\qquad \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{n})^2 a_1}{p-a_1} + \frac{(\mathfrak{j}\mathfrak{n})^2 a_2}{p-a_2} + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{n})^2 a_3}{p-a_3} = 0$$

und aus (238) und (226), falls $\mathfrak{A}\mathfrak{n}' \neq 0$ ist,

$$(240)\qquad \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{n}')^2}{ha_1-1} + \frac{(\mathfrak{j}\mathfrak{n}')^2}{ha_2-1} + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{n}')^2}{ha_3-1} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen können wir für ein gegebenes $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ p und h bestimmen und erhalten, da diese Gleichungen quadratisch in bezug auf p und h sind, die gesuchten zwei Werte dieser Größen.

45. Hilfstensoren. Zwecks weiterer Untersuchung wollen wir annehmen, es sei

$$(241)\qquad a_3 > a_2 > a_1 > 0.$$

Wir führen zwei Hilfstensoren, mit denselben Richtungen der Hauptachsen wie $\mathfrak{A}$, ein

$$(242)\qquad \mathfrak{B} = b_1\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 + b_2\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 + b_3\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0$$

$$(243)\qquad \mathfrak{M} = m_1\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 + m_2\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 + m_3\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0,$$

wo die entsprechenden Hauptwerte gegeben sind durch

$$(244)\qquad \begin{cases} b_1 = \sqrt{a_1}; & b_2 = \sqrt{a_2}; & b_3 = \sqrt{a_3}; \\ m_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a_1}}; & m_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a_2}}; & m_3 = \dfrac{1}{\sqrt{a_3}}. \end{cases}$$

Aus (241) folgt, daß b und m reelle Größen sind.

Wir legen jetzt zwei Ebenen durch den Koordinatenanfang. Die eine soll senkrecht zu $\mathfrak{n}$ sein, die $\mathfrak{n}$-Ebene, und die andere senkrecht zu $\mathfrak{n}'$, die $\mathfrak{n}'$-Ebene.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß die Schnittkurve einer Ebene mit einem Ellipsoid eine Ellipse ergibt. Wir bestimmen jetzt die Halbachsen, bzw. q_1 und q_2, derjenigen Ellipse, welche durch die $\mathfrak{n}$-Ebene und das Ellipsoid von $\mathfrak{B}$ entsteht, und desgleichen die Halbachsen, bzw. u_1 und u_2, der Ellipse der $\mathfrak{n}'$-Ebene und des Ellipsoids von $\mathfrak{M}$. Es bestimmen sich z. B. q_1 und q_2 aus der in q^2 quadratischen Gleichung:

$$(245)\qquad \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{n})^2 b_1^2}{q^2 - b_1^2} + \frac{(\mathfrak{j}\mathfrak{n})^2 b_2^2}{q^2 - b_2^2} + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{n})^2 b_3^2}{q^2 - b_3^2} = 0,$$

und desgleichen erhalten wir für u

$$(246)\qquad \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{n}')^2 m_1^2}{u^2 - m_1^2} + \frac{(\mathfrak{j}\mathfrak{n}') m_2^2}{u^2 - m_2^2} + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{n}')^2 m_3^2}{u^2 - m_3^2} = 0.$$

Im Hinblick auf (244) erkennen wir, daß (245) mit (239) und (246) mit (240) identisch wird, d. h.

$$(247)\qquad p = q^2,\ h = u^2$$

und aus (231) folgt

$$(248)\qquad 1 = qu\cos\varphi.$$

Demnach bestimmen die Halbachsen der Ellipse der $\mathfrak{n}$-Ebene die Werte von p und die Halbachsen der Ellipse der $\mathfrak{n}'$-Ebene diejenigen von h.

Wir wollen beweisen, daß diese Halbachsen außerdem in den Hauptebenen liegen und dadurch die Lagen der Hauptebenen bestimmen.

Zu dem Zweck multiplizieren wir (225) skalar mit $\mathfrak{r}_0$ und erhalten unter Berücksichtigung von (244) und (229):

$$(\mathrm{a})\qquad \mathfrak{A}\mathfrak{r}_0 = (\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0)^2 b_1^2 + (\mathfrak{j}\mathfrak{r}_0)^2 b_2^2 + (\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0)^2 b_3^2 = p\cos^2\varphi.$$

Legen wir jetzt an das Ellipsoid von $\mathfrak{B}$ eine Tangentialebene senkrecht zu $\mathfrak{r}_0$, so ist bekanntlich (a) nichts anderes als das Quadrat der Normale N, welche vom Koordinatenanfang auf diese Ebene gefällt ist. Es ist deshalb

$$(249) \qquad N^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{r}_0 = p \cos^2\varphi .$$

Bezeichnen wir durch ϱ die Länge eines Radiusvektors vom Koordinatenanfang bis zur Oberfläche des Ellipsoids von $\mathfrak{B}$ und durch $\mathfrak{r}$ den entsprechenden Einheitsvektor, so erhalten wir aus der Gleichung des Ellipsoids in bekannter Weise

$$(b) \qquad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{r})^2}{b_1^2} + \frac{(\mathfrak{j}\mathfrak{r})^2}{b_2^2} + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{r})^2}{b_3^2}.$$

Lassen wir jetzt $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfallen und berücksichtigen, daß laut (225), (230) und (244)

$$\mathfrak{i}\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 \cdot a_1}{A} = \frac{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 \cdot b_1^2}{p \cos\varphi} \text{ usw.}$$

ist, so ergibt (b) mit Hülfe von (a) $\varrho^2 = p$, d. h.

$$(c) \qquad \varrho = q.$$

Ganz analog erhalten wir für die Länge ϱ_1 eines Radiusvektors des Ellipsoids von $\mathfrak{M}$ längs der Richtung von $\mathfrak{r}_0$ aus

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0)^2}{m_1^2} + \frac{(\mathfrak{j}\mathfrak{r}_0)^2}{m_2^2} + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0)^2}{m_3^2},$$

und wegen (244) und (249):

$$1 = \varrho_1^2 p \cos^2\varphi$$

oder nach (231) und (247):

$$(d) \qquad \varrho_1 = u.$$

Da aber $\mathfrak{A}$ in der Ebene der Ellipse der $\mathfrak{n}$-Ebene liegt und $\mathfrak{r}_0$ in der Ebene der Ellipse der $\mathfrak{n}'$-Ebene, und q und u die entsprechenden Halbachsen sind, so folgt aus (c) und (d), daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{r}_0$ mit diesen Halbachsen zusammenfallen müssen. Dadurch ist bewiesen, daß die Lagen der Hauptebenen durch die Halbachsen q und u bestimmt sind.

Aus (249) folgt weiter

$$(e) \qquad N = q \cos\varphi,$$

was zusammen mit (c) lehrt, daß die zu $\mathfrak{r}_0$ senkrechte Tangentialebene an das Ellipsoid von $\mathfrak{B}$ es im Durchstoßpunkt mit $\mathfrak{A}$ berührt.

Hierdurch sind wir imstande, bei gegebenen Hauptwerten a_1, a_2, a_3, für eine bestimmte Richtung eines der drei Vektoren $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}'$ die zwei anderen zu bestimmen, die Lage der Hauptebenen und die Werte von q und u, bzw. p und h. Da die Hauptwerte gegeben sind, so können wir die drei Ellipsoide von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ konstruieren.

Wir wollen uns das ausgeführt denken und $\mathfrak{r}_0$ als gegeben annehmen. Dann ergibt die Tangentialebene an das Ellipsoid von $\mathfrak{B}$, senkrecht zu $\mathfrak{r}_0$, durch ihren Berührungspunkt die Richtung von $\mathfrak{A}$. Dadurch ist die Hauptebene festgelegt und ebenso die Richtungen von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$. Die entsprechenden Schnittellipsen ergeben u und q und die Lagen der anderen, durch $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ gehenden Hauptebenen. Ist $\mathfrak{n}$ gegeben, so bestimmt die entsprechende Schnittellipse des Ellipsoids von $\mathfrak{B}$ die Lagen von $\mathfrak{A}$ und der Hauptebenen. Die Normale vom Koordinatenanfang auf die Tangentialebene an das Ellipsoid von $\mathfrak{B}$ am Durchstoßpunkt mit $\mathfrak{A}$ liefert die Richtung von $\mathfrak{r}_0$, wodurch $\mathfrak{n}'$ bestimmt wird usw. Analog verfährt man, falls $\mathfrak{n}'$ gegeben ist.

Bekanntlich hat ein Ellipsoid zwei Kreisschnitte, deren Radien gleich und zwar gleich der mittleren Halbachse des Ellipsoids sind. Die Ebenen dieser Kreisschnitte schneiden sich längs dieser Achse, und die Zentren liegen im Koordinatenanfang.

Wir legen jetzt durch einen beliebigen, vom Koordinatenanfang gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ zwei Ebenen, welche durch die beiden Achsen der Kreisschnitte gehen sollen, d. h. durch die auf die Kreisschnitte im Mittelpunkt errichteten Normalen. Diese Ebenen wollen wir Nebenebenen von $\mathfrak{r}$, in bezug auf das gegebene Ellipsoid, nennen. Legen wir durch den Koordinatenanfang eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{r}$, so folgt bekannterweise, daß diejenigen Ebenen, welche durch $\mathfrak{r}$ und die Halbachsen der entsprechenden Schnittellipse gelegt sind, die Winkel zwischen den Nebenebenen von $\mathfrak{r}$ halbieren.

Hierdurch erhalten wir eine andere Möglichkeit, die Lagen der Hauptebenen zu bestimmen, denn aus dem eben Gesagten folgt: Die Hauptebenen, bei festem $\mathfrak{n}$, halbieren die Winkel zwischen den Nebenebenen von $\mathfrak{n}$ in bezug auf das Ellipsoid von $\mathfrak{B}$, und analog halbieren die Hauptebenen bei festem $\mathfrak{n}'$ die Winkel zwischen den Nebenebenen von $\mathfrak{n}'$ in bezug auf das Ellipsoid von $\mathfrak{M}$.

Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Ungleichungen (e) Nr. **44** erfüllt sind. Es kann aber auch

$$p = p',\ h = h' \tag{f}$$

sein. Dieser Fall wird eintreten, wie leicht zu sehen, wenn $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ mit den Achsen der entsprechenden Kreisschnitte zusammenfällt. Ist aber (f) erfüllt, so folgt unmittelbar aus (c) und (d) Nr. **44**, daß es bei diesen Lagen von $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ unendlich viele Hauptebenen gibt, die alle durch $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ gehen.

Wir bezeichnen die entsprechenden $\mathfrak{n}$, falls $\mathfrak{n}$ mit den Achsen der Kreisschnitte des Ellipsoids von $\mathfrak{B}$ zusammenfällt, durch $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ und entsprechend durch $\mathfrak{n}_1'$ und $\mathfrak{n}_2'$, falls $\mathfrak{n}'$ mit den Achsen der Kreisschnitte des Ellipsoids von $\mathfrak{M}$ zusammenfällt. Für die positiven Richtungen dieser vier Vektoren nehmen wir diejenigen an, welche oberhalb der XY-Ebene liegen, also nach der positiven Richtung der Z-Achse zu.

Bezeichnen wir ferner

$$\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1 = g_1;\ \mathfrak{k}\mathfrak{n}_1 = g_2;\ \mathfrak{i}\mathfrak{n}_1' = g_1';\ \mathfrak{k}\mathfrak{n}_1' = g_2', \tag{g}$$

so ist $\quad \mathfrak{i}\mathfrak{n}_2 = -g_1;\ \mathfrak{k}\mathfrak{n}_2 = g_2;\ \mathfrak{i}\mathfrak{n}_2' = -g_1';\ \mathfrak{k}\mathfrak{n}_2' = g_2',$

und wir erhalten

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{n}_1 &= \mathfrak{i}g_1 + \mathfrak{k}g_2; & \mathfrak{n}_2 &= -\mathfrak{i}g_1 + \mathfrak{k}g_2 \\ \mathfrak{n}_1' &= \mathfrak{i}g_1' + \mathfrak{k}g_2'; & \mathfrak{n}_2' &= -\mathfrak{i}g_1' + \mathfrak{k}g_2'. \end{aligned}\right. \tag{250}$$

Die Richtigkeit von (250) ergibt sich daraus, daß, laut (241), die mittleren Halbachsen der drei Ellipsoide von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ mit der Y-Achse zusammenfallen und infolgedessen die Achsen der Kreisschnitte in der XZ-Ebene liegen.

Die Werte für die g bestimmen sich aus der analytischen Geometrie, unter Berücksichtigung von (241) und (244), zu

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{b_3}{b_2}\sqrt{\frac{b_2^2 - b_1^2}{b_3^2 - b_1^2}} = \sqrt{\frac{a_3(a_2 - a_1)}{a_2(a_3 - a_1)}} \\ g_2 &= \frac{b_1}{b_2}\sqrt{\frac{b_3^2 - b_2^2}{b_3^2 - b_1^2}} = \sqrt{\frac{a_1(a_3 - a_2)}{a_2(a_3 - a_1)}} \end{aligned} \tag{251}$$

und

$$(252)\qquad \begin{aligned} g_1' &= \frac{m_3}{m_2}\sqrt{\frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 - m_3^2}} = \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}} \\ g_2' &= \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_2^2 - m_3^2}{m_1^2 - m_3^2}} = \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}}. \end{aligned}$$

Machen wir jetzt $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1$, so ist die Lage der Hauptebene beliebig. Bei ihrer Drehung um $\mathfrak{n}_1$ ändert sich ständig der Winkel φ und geht bei einer vollen Umdrehung zweimal durch Null, da der Kreisschnitt durch die Y-Achse geht und $\mathfrak{X}$ im Kreisschnitt liegt.

Wir bezeichnen durch ψ den Winkel zwischen der Hauptebene und der XZ-Ebene, positiv gerechnet im entgegengesetzten Sinne der Drehung des Uhrzeigers, falls man längs $\mathfrak{n}_1$ hinblickt, wobei für $\psi = 0$ beide Ebenen zusammenfallen, und wollen jetzt die Beziehung zwischen φ und ψ ableiten.

Für eine beliebige Lage der Hauptebene erhalten wir aus dem sphärischen Dreieck, welches durch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{r}_0$ gebildet wird,

$$\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 = g_1 \sin\varphi - g_2 \cos\varphi \cos\psi$$

und analog aus dem sphärischen Dreieck $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{r}_0$

$$\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 = g_2 \sin\varphi + g_1 \cos\varphi \cos\psi$$

wegen

$$\sqrt{1 - g_1^2} = g_2 \text{ und } \sqrt{1 - g_2^2} = g_1.$$

Anderseits folgt aus (225), (226) und (g)

$$\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 \cdot g_1 a_1 + \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 \cdot g_2 a_3 = 0.$$

Hieraus und aus den obigen Werten für $\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0$ gewinnen wir die gesuchte Beziehung

$$(253)\qquad \operatorname{tg}\varphi = -\cos\psi \cdot \sqrt{\frac{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}{a_1 a_3}}.$$

Nehmen wir etwa $\psi = 0$ an, so folgt aus (253), daß tg φ negativ ist, d. h. der Definition von φ in Nr. **44** zufolge liegt in diesem Fall $\mathfrak{n}'$ zwischen $\mathfrak{n}_1$ und der Z-Achse.

Ganz analog erhalten wir, falls $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}_1'$ ist, aus den sphärischen Dreiecken, welche durch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{X}_0$ gebildet werden,

wo $\mathfrak{A}_0$ den Einheitsvektor längs $\mathfrak{A}$ bedeutet, unter Berücksichtigung der angenommenen positiven Richtung von φ,

$$\mathfrak{i}\mathfrak{A}_0 = - g_1' \sin\varphi - g_2' \cos\varphi \cdot \cos\psi_1$$

$$\mathfrak{k}\mathfrak{A}_0 = - g_2' \sin\varphi + g_1' \cos\varphi \cdot \cos\psi_1,$$

wenn ψ_1 den Winkel zwischen der XZ-Ebene und der Hauptebene bei festem $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}_1'$ bedeutet. Die positive Richtung von ψ_1 bestimmt sich genau so, wie diejenige von ψ, und ebenso bedeutet $\psi_1 = 0$ das Zusammenfallen der Hauptebene mit der XZ-Ebene.

Aus (g) Nr. **44**, (226) und (g) fließt weiter

$$\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 g_1' + \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 g_2' = 0.$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$\mathfrak{i}\mathfrak{A}_0 = \frac{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 a_1}{A}, \quad \mathfrak{k}\mathfrak{A}_0 = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 \cdot a_3}{A},$$

so erhalten wir aus diesen Gleichungen endlich

$$\operatorname{tg}\varphi = - \cos\psi_1 \frac{\sqrt{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}}{a_2} \tag{254}$$

d. h. bei $\psi_1 = 0$ liegt $\mathfrak{n}$ zwischen der X-Achse und $\mathfrak{n}_1'$.

Formeltafel.

3 (12) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ falls $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$

3 (13) $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = A^2$

3 (14) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 = A$

4 (21) $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = 0$ falls $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$

5 (27) $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$

5 (29) $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}$

5 (32) $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = 0$, falls $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ komplanar sind oder $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{C}$

6 (40) $\mathfrak{A}\, d\mathfrak{A}_0 = 0$

9 (47) $\mathfrak{a}_0 \nabla p = \frac{dp}{da}$

9 (54) $\operatorname{div} \mathfrak{A}p = p \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\nabla p$

9 (55) $\nabla pq = p\nabla q + q\nabla p$

10 (59) $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}|\frac{d\mathfrak{B}}{da}$

10 (63) $\operatorname{rot} [\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{B}$

10 (65) $\operatorname{div} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{B}$

11 (68) $\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \operatorname{grad} (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} +$
$+ [\mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{A}]$

11 (69) $\operatorname{rot} \mathfrak{A}p = p \operatorname{rot} \mathfrak{A} - [\mathfrak{A}\nabla p]$

11 (70) $\nabla \mathfrak{A}^2 = 2\,(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{A} + 2\,[\mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{A}]$

11 (73) $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}[\mathfrak{C} \operatorname{rot} \mathfrak{B}]$

11 (74) $\mathfrak{B}\nabla \mathfrak{A}^2 = 2\,\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A}$

12 (79a) $\operatorname{rot}^2 \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}$

12 (80) $\operatorname{rot} \nabla p = 0$

12 (81) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$

12 (84) $\nabla^2 p\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \operatorname{div} \nabla p$, falls $\mathfrak{B} =$ konst.

13 (87) $\int\limits_f \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, df = \int\limits_L \mathfrak{A}\, d\mathfrak{l}$ (Stokesscher Satz)

13 (90) $\int\limits_f [\mathfrak{n}\nabla p]\, df = \int\limits_L p\, d\mathfrak{l}$

14 (91) $\int\limits_F \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} = \int\limits_V \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dv$ (Gaußscher Satz)

14 (92) $\int\limits_F p\, d\mathfrak{f} = \int\limits_V \nabla p\, dv$

14 (93) $\int\limits_F [d\mathfrak{f}\mathfrak{B}] = \int\limits_V \operatorname{rot} \mathfrak{B}\, dv$

14 (94) $\int\limits_V \nabla^2 \mathfrak{A}\, dv = \int\limits_F (d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{A}$

15 (97) $\nabla r = \mathfrak{r}_0$

15 (100) $\operatorname{div} \mathfrak{r} = 3$

16 (101) $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{r} = \mathfrak{A}$

16 (102) $(\mathfrak{r}_0\nabla)\mathfrak{A} = \frac{d\mathfrak{A}}{dr}$

17 (107) $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}$

31 (162) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$

31 (163) $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{i}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathfrak{j}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + {} + \mathfrak{k}(A_1 B_2 - A_2 B_1)$

34 (176) $\nabla p = \mathfrak{a} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \mathfrak{b} \frac{1}{N} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \mathfrak{c} \frac{1}{P} \frac{\partial p}{\partial \gamma}$

34 (178) $\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{MNP} \left\{ \frac{\partial A_1 NP}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_2 MP}{\partial \beta} + \frac{\partial A_3 MN}{\partial \gamma} \right\}$

34 (179) $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{a} \frac{1}{NP} \left(\frac{\partial P A_3}{\partial \beta} - \frac{\partial N A_2}{\partial \gamma} \right) + {} + \mathfrak{b} \frac{1}{MP} \left(\frac{\partial M A_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial P A_3}{\partial \alpha} \right) + \mathfrak{c} \frac{1}{MN} \left(\frac{\partial N A_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial M A_1}{\partial \beta} \right)$

34 (181) $\operatorname{div} \nabla p = \nabla^2 p = {} = \frac{1}{MNP} \left\{ \frac{\partial \frac{NP}{M} \frac{\partial p}{\partial \alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \frac{MP}{N} \frac{\partial p}{\partial \beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \frac{MN}{P} \frac{\partial p}{\partial \gamma}}{\partial \gamma} \right\}$

35 (188) $$\operatorname{grad} p = \nabla p = \mathfrak{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial p}{\partial z}$$

35 (189) $$\operatorname{div} \nabla p = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

35 (190) $$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

35 (191) $$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \\ + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$$

Die $\mathfrak{i}$-Komponente von $\nabla^2 \mathfrak{A}$ ist

35 (192) $$\mathfrak{i}\nabla^2 \mathfrak{A} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} = \operatorname{div} \nabla A_1$$

Die $\mathfrak{i}$-Komponente von $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$ ist

35 (193) $$\mathfrak{i}(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_1}{\partial z}.$$

Sachregister.

ственныхъ отношеній, которые сохранятъ за собою
все значеніе количественнаго метода, оставались
бы всегда геометрическими; такими методами
и является современный векторіальный анализъ.
Понятія скаляръ и векторъ. Введены впервые Гамильтономъ
(1853)
„Ученіе о векторіальномъ полѣ в настоящее время сдѣлалось
необходимымъ элементомъ в гидродинамикѣ, теоріи
упругости, электричества и магнетизма.“

Фоссъ 9, „Подъ вліяніемъ Декарта геометрія
свелась к ученію о числахъ“, „Этотъ
крайне примитивный пріемъ обозначенія положенія
точки в пространствѣ координатами X, Y, Z
употреблялся в самыя древнія времена, но
впервые Декартъ освободилъ понятіе
координатъ отъ лежащихъ в его основѣ пред-
ставленій величины и разсматривалъ эти
X, Y, Z какъ чистыя числа, которыя, впрочемъ,
могутъ быть примѣнены только будучи отнесены
к употребляемой в каждомъ данномъ случаѣ единицѣ
длины.
„Геометрія переводится на языкъ ученія о
числахъ“.

